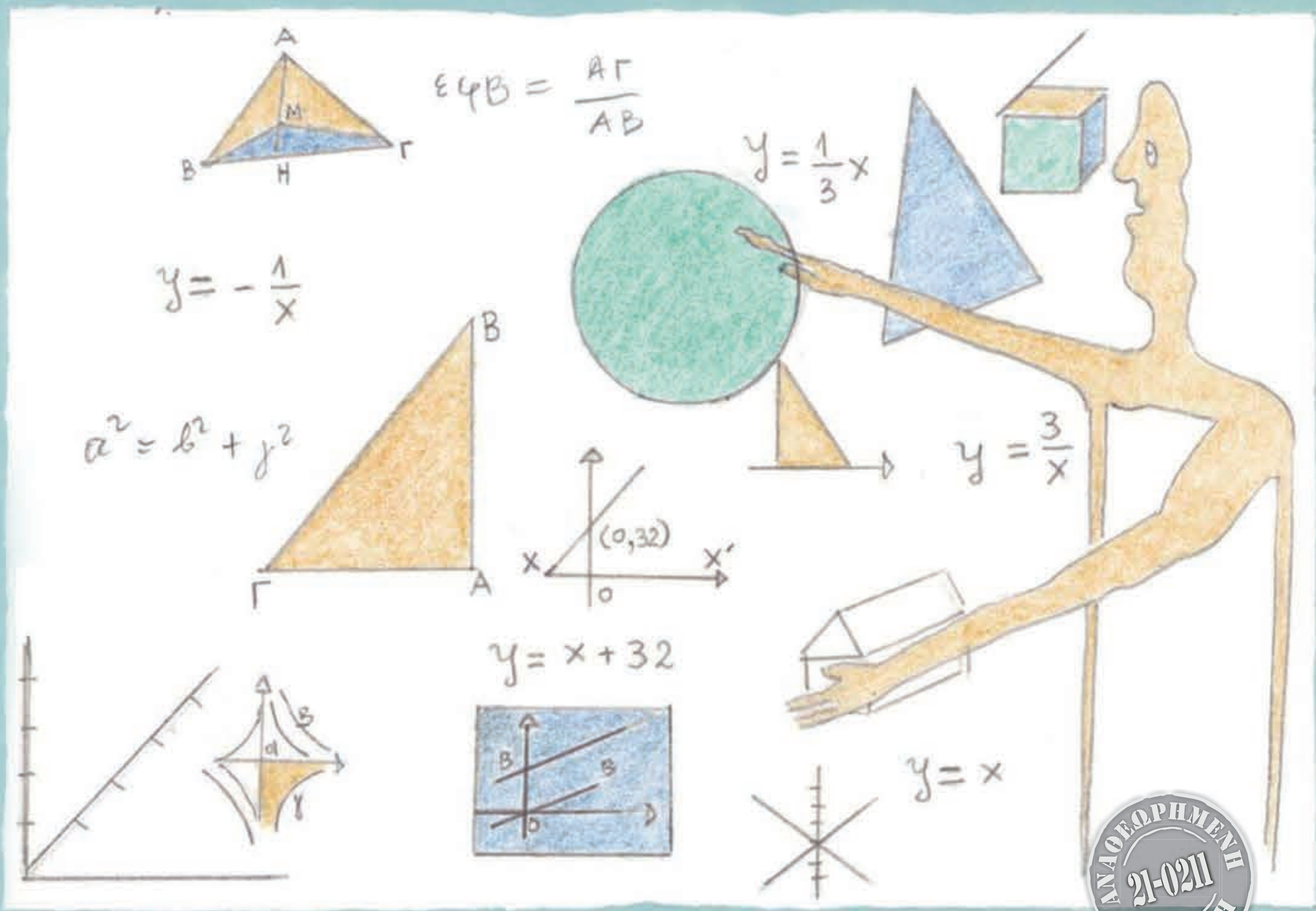
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Παναγιώτης Βλάμος **Παναγιώτης Δρούτσας**
Γεώργιος Πρέσβης **Κωνσταντίνος Ρεκούμης**



ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ 21-0211

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Παναγιώτης Βλάμος**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης* **Παναγιώτης Δρούτσας**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης* **Γεώργιος Πρέσβης**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης* **Κωνσταντίνος Ρεκούμης**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*
ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Βασίλειος Γιαλαμάς**, *Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.* **Χαράλαμπος Τουμάσης**, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών* **Πολυξένη Ράδου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Θεοδόσης Βρανάς**, *Σκιτσογράφος - Εικονογράφος*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Ευγενία Βελάγκου**, *Φιλόλογος, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	**Γεώργιος Πολύζος**, *Πάρεδρος ε.θ. του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	**Γεώργιος Μήλιος**, *Ζωγράφος - Χαράκτης*
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Γ΄ Κ.Π.Σ. / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.,
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πρόλογος

Το βιβλίο **«Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου»** περιλαμβάνει την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Αποτελείται από δύο μέρη τα οποία θα μελετηθούν παράλληλα και αρκετές φορές συμπληρωματικά.

Στο πρώτο μέρος, η Άλγεβρα ξεκινά με εξισώσεις και ανισώσεις α’ βαθμού, ενώ στο δεύτερο μέρος η Γεωμετρία ξεκινά με τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων τα οποία οδηγούν στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στη Γεωμετρία το Πυθαγόρειο θεώρημα θα μελετηθεί μόνο για ρητούς αριθμούς και κατόπιν θα αποτελέσει τη βάση για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας. Γνωρίζοντας τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να μελετήσουμε την Τριγωνομετρία, η οποία καταλαμβάνει τις περισσότερες παραγράφους του δεύτερου κεφαλαίου του δευτέρου μέρους, το οποίο ολοκληρώνεται με τα διανύσματα.

Στη συνέχεια η πορεία των δύο μερών του βιβλίου γίνεται σχεδόν ανεξάρτητη. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την παρουσίαση βασικών συναρτήσεων και την περιγραφική Στατιστική, ενώ το δεύτερο με τη μέτρηση κύκλου και τη μελέτη και μέτρηση γεωμετρικών στερεών.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - *ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ*

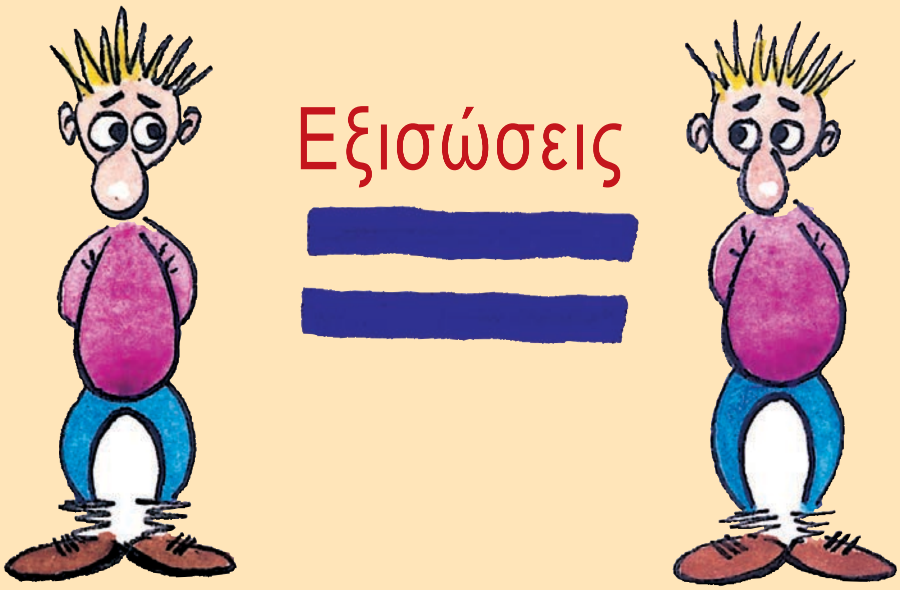
ΜΕΡΟΣ Β'

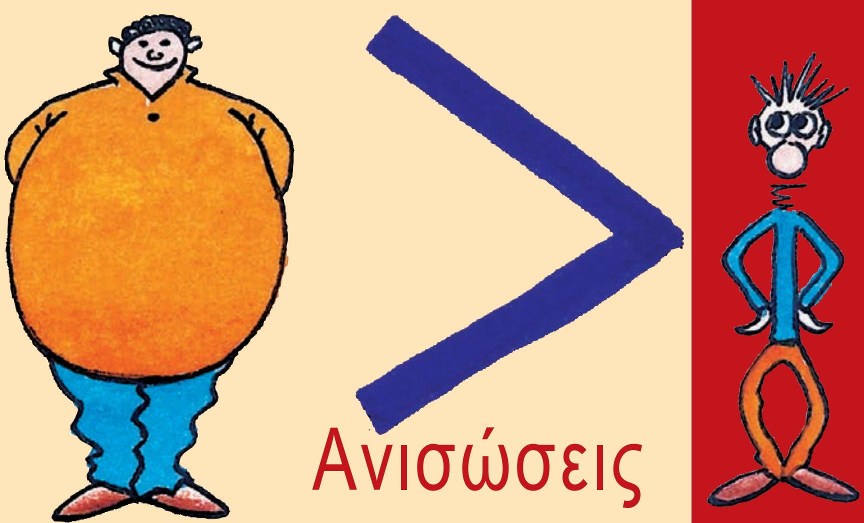
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο





Εισαγωγικο Σημειωμα

Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του μεγάλου έλληνα μαθηματικού ***Διόφαντου,*** *που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση).*
Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα ***«Αριθμητικά»*** *(6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται* ***«Διοφαντικές εξισώσεις».***

Όταν πέθανε, οι μαθητές του -κατά παραγγελίαν του- αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το Επίγραμμα του Διόφαντου.

«ΔΙΑΒΑΤΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ΣΕ ΕΣΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΣΟΦΟΣ, Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ
- Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.
- ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ.
- ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.
- ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ.
- ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.
- ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».

Σύμφωνα μ' αυτό το επίγραμμα, πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος; Αν x παριστάνει την ηλικία του Διόφαντου, όταν πέθανε, τότε το παραπάνω πρόβλημα παριστάνεται από την εξίσωση: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις (καθώς και ανισώσεις).
Θα αναζητήσουμε επίσης τρόπους να εφαρμόζουμε τη μέθοδο αυτή, για να λύνουμε προβλήματα της καθημερινής ζωής.

1.1. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

Μεταβλητή

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η ομιλία σε κινητό τηλέφωνο κοστίζει 0,005 € το δευτερόλεπτο. Πόσο κοστίζει ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων, ένα άλλο διάρκειας 15 δευτερολέπτων και ένα άλλο διάρκειας 27 δευτερολέπτων;

Λύση

Εύκολα βέβαια βρίσκουμε ότι:

- Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων κοστίζει $10 \cdot 0{,}005 = 0{,}05$ €.
- Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 15 δευτερολέπτων κοστίζει $15 \cdot 0{,}005 = 0{,}075$ €.
- Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 27 δευτερολέπτων κοστίζει $27 \cdot 0{,}005 = 0{,}135$ €.

Μπορούμε λοιπόν να σκεφτούμε ότι το κόστος ενός τηλεφωνήματος θα είναι: **(διάρκεια τηλεφωνήματος) · 0,005 €**. Για ευκολία, συμβολίζουμε με το γράμμα **x** τη διάρκεια του τηλεφωνήματος (σε δευτερόλεπτα), οπότε καταλήγουμε ότι το κόστος για κάθε τηλεφώνημα διάρκειας x δευτερολέπτων είναι: **x · 0,005 €**.

Το γράμμα **x**, που στην προκειμένη περίπτωση παριστάνει έναν οποιοδήποτε θετικό αριθμό, λέγεται **μεταβλητή**.

Γενικά:

Μεταβλητή είναι ένα γράμμα (π.χ. x, y, t, ...) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.

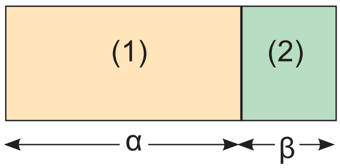
Αλγεβρικές παραστάσεις - Αναγωγή ομοίων όρων

- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, όπως γνωρίζουμε, **αριθμητική παράσταση**.
  Για παράδειγμα, η παράσταση $2 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) + 5$ είναι μια αριθμητική παράσταση. Ομοίως, η παράσταση $\dfrac{5 \cdot 8 + 4 \cdot 3}{2(-7) + 6 \cdot 9}$ είναι μία αριθμητική παράσταση.

- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.
  Για παράδειγμα, η παράσταση $2 \cdot x - 4 \cdot x + 5$ είναι μια αλγεβρική παράσταση. Οι προσθετέοι λέγονται **όροι** αυτής.
  Ομοίως, η παράσταση $\dfrac{2 \cdot x - 4}{3 \cdot x^2 + 5}$ είναι μία αλγεβρική παράσταση. **Πώς κάνουμε όμως τις πράξεις σε μια αλγεβρική παράσταση;** Στο σημείο αυτό μπορεί να μας βοηθήσει λίγο η Γεωμετρία! Ας θυμηθούμε, λοιπόν, τα εμβαδά των ορθογωνίων:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Στο διπλανό σχήμα δύο ορθογώνια (1) και (2) είναι «τοποθετημένα» έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα μεγάλο ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου.



Λύση

Για να βρούμε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου, υπάρχουν δύο τρόποι:

➤ **1ος τρόπος:**
Το μεγάλο ορθογώνιο έχει βάση α + β και ύψος γ, άρα το εμβαδόν του είναι:

(α + β) · γ

➤ **2ος τρόπος:**
Το εμβαδόν του (1) είναι: **α · γ**.
Το εμβαδόν του (2) είναι: **β · γ**.
Άρα το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι:

α · γ + β · γ

Φυσικά, και οι δύο τρόποι θα πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή: **(α + β) · γ = α · γ + β · γ**, που είναι η γνωστή **επιμεριστική ιδιότητα,** η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

α · γ + β · γ = (α + β) · γ

Στη μορφή αυτή, η επιμεριστική ιδιότητα μπορεί να μας βοηθήσει να κάνουμε εύκολα πράξεις στις αλγεβρικές παραστάσεις:

Παράδειγμα:

7 · α + 8 · α = (7 + 8) · α = 15 · α
x + 4 · x – 2 · x = (1 + 4 – 2) · x = 3 · x
5 · t – 6 · t – 8 · t = (5 – 6 – 8) · t = –9 · t

Η διαδικασία αυτή με την οποία γράψαμε σε απλούστερη μορφή τις παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις, ονομάζεται «αναγωγή ομοίων όρων».

Παρατήρηση:

Όταν γράφουμε αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δε βάζουμε το σύμβολο (·) του πολλαπλασιασμού μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών. Γράφουμε δηλαδή 3xy αντί για 3·x·y. Επίσης, γράφουμε 2(4xy – 1) + 3(2 – 5x) αντί για 2·(4·x·y – 1) + 3·(2 – 5·x).
Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιείται βέβαια, για τον πολλαπλασιασμό αριθμών: 3 · 5 ή 3·(–5).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις παραστάσεις:
(α) 2x + 5x, (β) 3α + 4α – 12α, (γ) ω + 3ω + 5ω + 7ω.

Λύση: Έχουμε ότι:
(α) 2x + 5x = (2 + 5)x = 7x
(β) 3α + 4α – 12α = (3 + 4 – 12)α = –5α
(γ) ω + 3ω + 5ω + 7ω = (1 + 3 + 5 + 7)ω = 16ω.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: (α) $4y + 3x – 2y + x$, (β) $y + 2ω – 3y + 2 + ω + 5$.

Λύση: Έχουμε ότι:

(α) $4y + 3x – 2y + x = 4y – 2y + 3x + x = (4 – 2)y + (3 + 1)x = 2y + 4x$

(β) $y + 2ω – 3y + 2 + ω + 5 = y – 3y + 2ω + ω + 2 + 5 = (1 – 3)y + (2 + 1)ω + (2 + 5) =$
$= –2y + 3ω + 7.$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $Α = 2(x + 3) – 4(x – 1) – 8$, όταν $x = –0,45$.

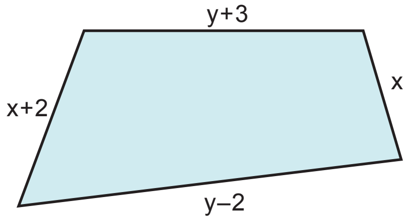
Λύση: Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση Α:

$Α = 2(x + 3) – 4(x – 1) – 8 =$
$= 2x + 6 – 4x + 4 – 8 = 2x – 4x + 6 + 4 – 8 = –2x + 2$

Επομένως, όταν $x = –0,45$, είναι: $Α = –2·(–0,45) + 2 = 0,9 + 2 = 2,9$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να υπολογίσετε την περίμετρο του παρακάτω τετραπλεύρου, όταν $x + y = 10$.



Λύση: Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι ίση με:

$Π = x + (y + 3) + (x + 2) + (y – 2) =$
$= x + y + 3 + x + 2 + y – 2 =$
$= x + x + y + y + 3 + 2 – 2 = 2x + 2y + 3 =$
$= 2(x + y) + 3$

Επειδή $x + y = 10$, είναι $Π = 2·10 + 3 = 20 + 3 = 23$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του διπλανού πίνακα με το ίσο του στοιχείο της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $2x+5x–3x$	i) $–4x$
β) $x–3x+4x$	ii) $–5x$
γ) $–x+3x–6x$	iii) $4x$
δ) $–2x+4x–7x$	iv) $2x$

2. Για κάθε αλγεβρική παράσταση της 1ης στήλης του διπλανού πίνακα, δίνονται τρεις απαντήσεις Α, Β και Γ, από τις οποίες μία μόνο είναι σωστή. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ
α) $2x–4x+6x=$	$12x$	$–2x$	$4x$
β) $3y–3y+4y=$	$4y$	$10y$	$–5y$
γ) $–5α+3α–α=$	$3α$	$–3α$	$9α$
δ) $3α–4β+4β–5α=$	$8α+8β$	$2α$	$–2α$

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $(3x + 5) + (x – 6)$	i) $–4x + 11$
β) $(–3x + 5) – (x – 6)$	ii) $–4x + 1$
γ) $(–3x + 5) – (x + 6)$	iii) $–4x – 1$
δ) $–(3x + 5) – (x – 6)$	iv) $4x – 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12.

β) Το άθροισμα δύο αριθμών πολλαπλασιασμένο επί 9.

γ) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, που το μήκος του είναι 2 m μεγαλύτερο από το πλάτος του.

2 Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

α) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 5 κιλά πατάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός κιλού.

β) Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή συν 19% ΦΠΑ.

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $20x - 4x + x$

β) $-7α - 8α - α$

γ) $14y + 12y + y$

δ) $14ω - 12ω - ω + 3ω$

ε) $-6x + 3 + 4x - 2$

στ) $β - 2β + 3β - 4β$

4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x - 4y + 3x + 3y$

β) $6ω - 2ω + 4α + 3ω + α$

γ) $x + 2y - 3x - 4y$

δ) $-8x + ω + 3ω + 2x - x$

5 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α, Β και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:

α) $Α = 3(x + 2y) - 2(2x + y)$, όταν $x = 1$, $y = -2$.

β) $Β = 5(2α - 3β) + 3(4β - α)$, όταν $α = -3$, $β = 5$.

6 Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $Α = 2(α-3β) + 3(α + 2β)$, όταν $α = 0{,}02$ και $β = 2005$.

β) $Β = 3(x + 2y) + 2(3x + y) + y$, όταν $x + y = \frac{1}{9}$.

7 Οι διαιτολόγοι, για να εξετάσουν αν ένα άτομο είναι αδύνατο ή παχύ, χρησιμοποιούν τον αριθμό $\frac{Β}{υ^2}$ (δείκτης σωματικού βάρους ή body mass index, δηλαδή BMI), όπου Β το βάρος του ατόμου και υ το ύψος του σε μέτρα. Ανάλογα με το αποτέλεσμα αυτό, το άτομο κατατάσσεται σε κατηγορία σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

	ΓΥΝΑΙΚΕΣ	ΑΝΔΡΕΣ
Κανονικό βάρος	18,5 - 23,5	19,5 - 24,9
1ος βαθμός παχυσαρκίας	23,6 - 28,6	25 - 29,9
2ος βαθμός παχυσαρκίας	28,7 - 40	30 - 40
3ος βαθμός παχυσαρκίας	πάνω από 40	πάνω από 40

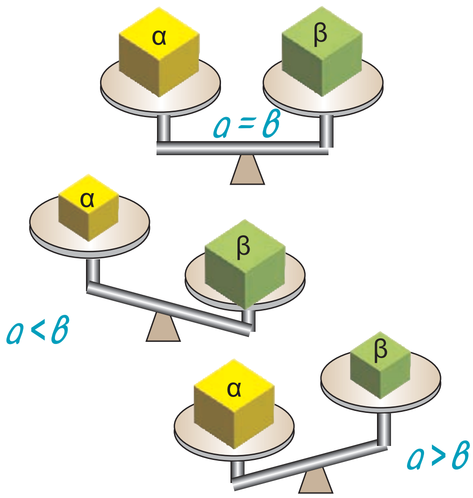
Να χαρακτηρίσετε:

α) Το Γιώργο, με βάρος 87 κιλά και ύψος 1,75 μέτρα.

β) Την Αλέκα, με βάρος 64 κιλά και ύψος 1,42 μέτρα.

γ) Τον εαυτό σας.

1.2. Εξισώσεις α΄ βαθμού



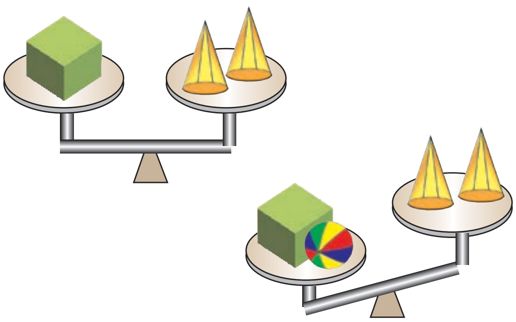
Χρήσιμες ιδιότητες πράξεων

Μια σχέση ισότητας ή ανισότητας είναι στην ουσία μια ζυγαριά, η οποία είτε ισορροπεί, είτε γέρνει από τη μία πλευρά, είτε γέρνει από την άλλη.

Αν α και β παριστάνουν τα βάρη των αντικειμένων του σχήματος, τότε θα ισχύει μία μόνο από τις σχέσεις:

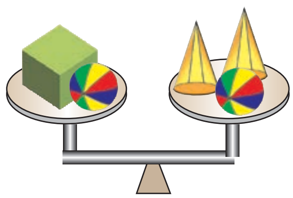
$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta$$

Για να χειριστούμε σωστά μια ισότητα, είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη μας μερικούς βασικούς κανόνες.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Γιώργος έχει μια ζυγαριά που ισορροπεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Πρόκειται δηλαδή για έναν κύβο που έχει βάρος ίσο με το βάρος δύο κώνων. Προσθέτει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκεται ο κύβος, μια μπάλα, οπότε η ζυγαριά γέρνει προς αυτή την πλευρά. Πόσες μπάλες πρέπει να τοποθετήσει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκονται οι δύο κώνοι, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;



Λύση

Για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει βέβαια να τοποθετήσει και στην άλλη πλευρά το ίδιο βάρος, δηλαδή μία μπάλα.

Δηλαδή: ένας κύβος και μία μπάλα ισορροπούν με 2 κώνους και μία μπάλα.

Το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως γενικότερο κανόνα για τις ισότητες.

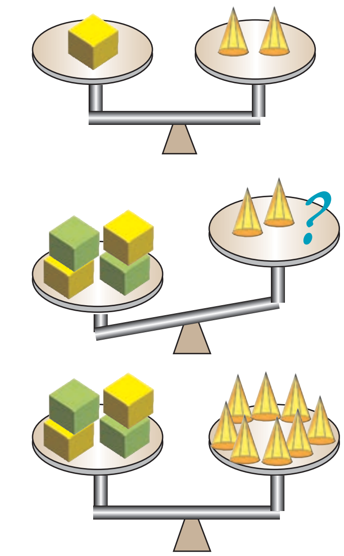
Άρα:

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας **προσθέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την αφαίρεση.

Άρα:

Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ο Γιώργος ξέρει ότι ένας κύβος ισορροπεί με δύο κώνους. Αν βάλει 4 κύβους στη μία πλευρά, πόσους κώνους πρέπει να βάλει στην άλλη πλευρά, ώστε να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;

Λύση

Αφού τετραπλασίασε το βάρος στη μία πλευρά, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει να τοποθετήσει τετραπλάσιο βάρος και στην άλλη πλευρά, δηλαδή πρέπει να τοποθετήσει 8 κώνους.

Γενικά:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **πολλαπλασιαστούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

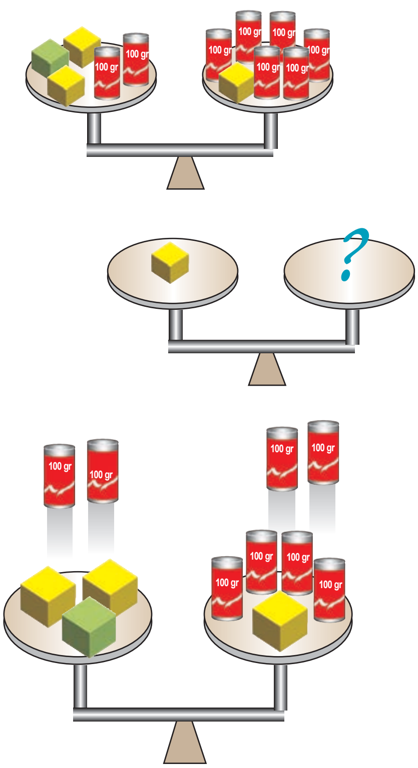
Αν $α=β$ τότε $α\cdot γ=β\cdot γ$.

Ομοίως:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **διαιρεθούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν $α=β$ τότε $\frac{α}{γ}=\frac{β}{γ}$ με $γ\neq 0$.

Η έννοια της εξίσωσης



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

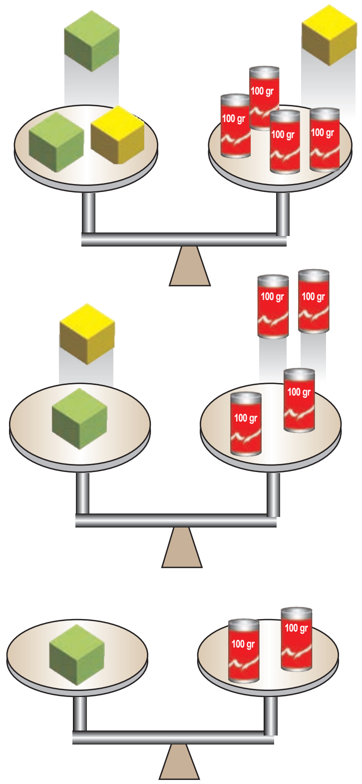
Η διπλανή ζυγαριά ισορροπεί! Μπορείτε να βρείτε πόσο ζυγίζει ένας κύβος; Τα βαρίδια ζυγίζουν 100 γραμμάρια το καθένα.

Λύση

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, θα πρέπει να προσπαθήσουμε να απομονώσουμε στον ένα δίσκο της ζυγαριάς έναν κύβο, φροντίζοντας όμως η ζυγαριά να ισορροπεί.

➤ **1ο βήμα:**

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι στον ένα δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν δύο βαρίδια των 100 γραμμαρίων το καθένα, και στον άλλο δίσκο υπάρχουν έξι. Επομένως, μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο βαρίδια από κάθε δίσκο χωρίς να “χαλάσουμε” την ισορροπία της ζυγαριάς.



➤ **2ο βήμα:**
Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι μπορούμε με τον ίδιο τρόπο ν' αφαιρέσουμε έναν κύβο από κάθε δίσκο χωρίς πάλι να διαταραχθεί η ισορροπία της ζυγαριάς.

➤ **3ο βήμα:**
Τώρα έχουν μείνει δύο κύβοι στον ένα δίσκο και τέσσερα βαρίδια στον άλλο. Για να βρούμε πόσο βάρος έχει ο ένας κύβος, μπορούμε να σηκώσουμε έναν κύβο από τον ένα δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος ενός δίσκου) και δύο βαρίδια από τον άλλο δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος του άλλου δίσκου). Διαιρέσαμε, λοιπόν, τα βάρη και των δύο δίσκων δια 2, οπότε η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί.

Άρα, ένας κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

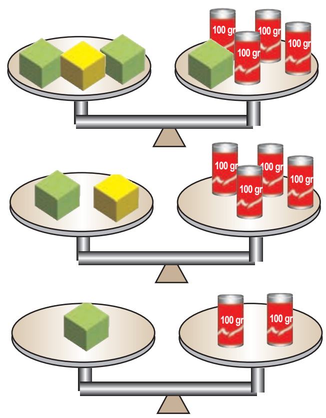
Ας δούμε τώρα μια «*μαθηματική*» λύση του παραπάνω προβλήματος:

Ας πούμε ότι κάθε κύβος ζυγίζει x κιλά.
Τότε, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς βρίσκονταν στην αρχή $3x + 200$ γραμμάρια και στο δεξιό δίσκο $x + 600$ γραμμάρια. Αφού η ζυγαριά ισορροπεί, θα είναι: $3x + 200 = x + 600$.

Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση.**

Η παράσταση $3x + 200$ λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $x + 600$ λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

Για να βρούμε τώρα τον άγνωστο αριθμό x, λύνουμε την εξίσωση.

Εξίσωση 3x + 200 = x + 600	**Περιγραφή λύσης**	
$3x+200-200=x+600-200$	Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$3x = x + 400$	Κάνουμε τις πράξεις	
$3x - x = x + 400 - x$	Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$(3 - 1)x = 400$ άρα $2x = 400$	Αναγωγή ομοίων όρων	
$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$	Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$x = 200$	Απλοποιούμε τα κλάσματα	

Άρα, ο κάθε κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

Επαλήθευση:

Πράγματι, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν $3 \cdot 200 + 200 = 600 + 200 = 800$ γραμμάρια και στο δεύτερο δίσκο υπάρχουν $200 + 600 = 800$ γραμμάρια. Δηλαδή, η ζυγαριά ισορροπεί.

Στην παραπάνω λύση της εξίσωσης $3x + 200 = x + 600$ «απομονώσαμε» το x στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, προσθέτοντας ή αφαιρώντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει πιο γρήγορα με τη βοήθεια του εξής πρακτικού κανόνα:

> Σε μία εξίσωση μπορούμε να **«μεταφέρουμε»** όρους από το ένα μέλος στο άλλο, **αλλάζοντας το πρόσημό τους**.

Δηλαδή: $3x+200 = x+600$ ← Μεταφέρουμε το +x στο πρώτο μέλος, οπότε γίνεται -x. Επίσης, μεταφέρουμε το +200 στο δεύτερο μέλος, οπότε γίνεται -200.

$3x-x = 600-200$

$2x = 400$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$ ← Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και απλοποιούμε τα κλάσματα.

Άρα $x = 200$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λυθεί η εξίσωση: $2(x-1)+3(2-x)=4(x+2)$.

Λύση: Έχουμε διαδοχικά:

$2x - 2 + 6 - 3x = 4x + 8$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$2x - 3x - 4x = 8 + 2 - 6$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$-5x = 4$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$\frac{-5x}{-5} = \frac{4}{-5}$ ← Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Άρα $x = -\frac{4}{5}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$.

Λύση: Σε αυτή την εξίσωση έχουμε και παρονομαστές.
Μπορούμε, όμως, να πάρουμε μια εξίσωση χωρίς παρονομαστές, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2 και 3. Συνήθως χρησιμοποιούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, το οποίο εδώ είναι το 6. **Η διαδικασία αυτή λέγεται απαλοιφή παρονομαστών**.

$$6\left(\frac{y+1}{2}+y\right)=6\left(\frac{2y+3}{3}+2\right)$$ ← Απαλοιφή παρονομαστών: πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 6

$$6\,\frac{y+1}{2}+6y=6\,\frac{2y+3}{3}+6\cdot 2$$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$3(y+1)+6y=2(2y+3)+12$$ ← Απλοποιούμε τα κλάσματα

$$3y+3+6y=4y+6+12$$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$3y+6y-4y=6+12-3$$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$5y=15$$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$$\frac{5y}{5}=\frac{15}{5}$$ ← Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Άρα $y=3$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να λυθεί η εξίσωση: $2(3-x)+4(x-1)=2x+5$.

Λύση: Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 6-2x+4x-4 &= 2x+5 \\ -2x+4x-2x &= 5-6+4 \\ 0x &= 3 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς x διαιρώντας με τον συντελεστή του αγνώστου, γιατί, όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.
Παρατηρούμε, όμως, ότι για κάθε τιμή του x, το πρώτο μέλος της εξίσωσης ισούται πάντα με 0, οπότε δε μπορεί να είναι ίσο με 3. Επομένως, η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **αδύνατη**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{3}{5}-\dfrac{2x+1}{10}=\dfrac{5-2x}{10}$.

Λύση: Έχουμε διαδοχικά:

$$10\,\frac{3}{5}-10\,\frac{2x+1}{10}=10\,\frac{5-2x}{10}$$ ← Απαλοιφή παρονομαστών: πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 10

$$2\cdot 3-(2x+1)=5-2x$$ ← Απλοποιούμε τα κλάσματα

$$6-2x-1=5-2x$$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$$-2x+2x=5-6+1$$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$0x=0$$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

Στην περίπτωση αυτή επίσης, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς x διαιρώντας με τον συντελεστή του αγνώστου, γιατί όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.
Παρατηρούμε όμως, ότι η εξίσωση $0x=0$ επαληθεύεται για όλες τις τιμές του x.
Για παράδειγμα: $0\cdot 2=0$, $0\cdot 3=0$, $0\cdot(-7)=0$ κ.τ.λ. Δηλαδή, κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα**.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στις παρακάτω ισότητες να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει:

α) $5 + ... = 35$ β) $5 \cdot ..... = 35$ γ) $127 - ..... = 103$

δ) $32 - ..... = 35$ ε) $14 + ... = 5$ στ) $2 \cdot ..... + 3 = 17$

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) Η εξίσωση $2x = 6$ έχει λύση τον αριθμό 3.		
β) Η εξίσωση $5x + x = x$ είναι ταυτότητα.		
γ) Οι εξισώσεις $x + 1 = 5$ και $-x + 5 = 1$ έχουν λύση τον ίδιο αριθμό.		
δ) Η εξίσωση $3x = 0$ είναι ταυτότητα.		
ε) Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ είναι αδύνατη.		

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) $-2x = 4$	i) -8
β) $3x = -9$	ii) 3
γ) $\frac{1}{2}x = -4$	iii) -2
δ) $2x = 3 + x$	iv) -3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι η λύση της εξίσωσης:

α) $-2x + 3 = 21$ $x = -7$

β) $3x + 5 = 7{,}5$ $x = 0{,}5$

γ) $-3x + 4 = 7x - 6$ $x = 1$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x + 21 = 4 + x - 5$

β) $-9 + 7y + y = 1 - 2y$

γ) $3t - 3(t + 1) = t + 2(t + 1) + 1$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4(2x + 1) - 6(x - 1) = 3(x + 2)$

β) $3(y + 1) + 2(y - 4) = 2y - (y - 6)$

γ) $6(ω + 2) + 3 = 3 - 2(ω - 4)$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2x + 3}{2} = \frac{3x - 5}{4}$

β) $\frac{7x - 6}{3} = \frac{5x + 2}{4}$

γ) $\frac{2(x - 1) - 2}{2} = \frac{1 - 3x}{4}$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x + 4}{5} - \frac{x - 4}{3} = \frac{1 - 3x}{15} - 2$

β) $\frac{y - 1}{3} - \frac{2y + 7}{6} = y + \frac{1 - 3y}{2}$

γ) $\frac{1}{4}(ω + 4) - 7 = (1 - ω)\frac{1}{7} + \frac{ω - 23}{4}$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x - \left(\frac{2x}{3} - 5\right) = 6 - \left(\frac{x}{3} - 2\right)$

β) $5 - \left(\frac{t + 1}{2} + \frac{1 + 2t}{3}\right) = 12 - \left(t - \frac{t + 5}{6}\right)$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{\frac{1 + x}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ β) $\dfrac{2t - \frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{2}} = \dfrac{1 - \frac{t}{2}}{2 - \frac{1}{2}}$

8 Για ποια τιμή του x είναι Α = Β;

α) αν $A = 5x - 3$, $B = 12 - 2x$

β) αν $A = 2(x - 1) + \frac{3}{2}$, $B = 6 + \frac{x}{3}$

9 Δίνεται η εξίσωση:

$$μ(x + 6) - 2 = (2μ - 1)x + 2$$

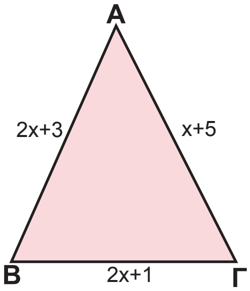
α) Αν $μ = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x = 8$.

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 7$, να αποδείξετε ότι $μ = 3$.

γ) Αν $μ = 1$, να λύσετε την εξίσωση.

10 Δίνεται το παρακάτω τρίγωνο.

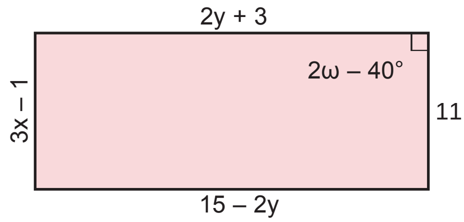
α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;



β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;

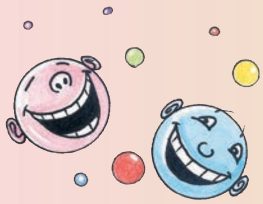
γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.

11 Δίνεται το ορθογώνιο του παρακάτω σχήματος. Να βρείτε τους αριθμούς x, y και ω (το ω παριστάνει μοίρες).



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά στα παρακάτω αριθμητικά σταυρόλεξα;



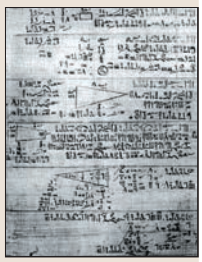
2	·		+	5	=	11
·		·		·		·
	·		+		=	22
+		+		+		+
	·	2	+	4	=	
=		=		=		=
13	·	17	+	39	=	

	·		+	-2	=	-11
·		·		·		·
-3	·		+		=	-7
+		+		+		+
	·	-3	+	-9	=	
=		=		=		=
-14	·	-6	+	-1	=	

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες.

Κατά την αρχαιότητα η έλλειψη κατάλληλου συμβολισμού είχε εμποδίσει τις λύσεις προβλημάτων με αποτέλεσμα αυτές να θεωρούνται πολύπλοκες και δύσκολες.



- *Στον περίφημο αιγυπτιακό πάπυρο του Ρηντ (περίπου 1700 π.Χ. - Βρετανικό Μουσείο) περιγράφονται προβλήματα με ιερογλυφικά (διαβάζονται από δεξιά προς τα αριστερά).*

- *Στην Αναγέννηση (15ος - 16ος αιώνας) οι συμβολισμοί απλοποιήθηκαν κατά κάποιον τρόπο:*
  – *Ο Γάλλος Nicolas Chuquet (1445 - 1500) έγραφε: «12^0 p 5^1 ισούται με 20^0», δηλαδή $12x^0 + 5x^1 = 20x^0$ ή πιο απλά $12 + 5x = 20$.*
  – *Επίσης, ο Γάλλος François Viete (1540 - 1603) έγραφε: «12aq 5a aeq. 23».*
  – *Ο Ιταλός Niccolo Fontana ή Tartaglia (1499 - 1557) έγραφε επίσης: «12 N p 5 R ισούται 20 N».*

- *Ο Γάλλος René Descartes (ή Καρτέσιος 1596 - 1650) στις αρχές του 17ου αιώνα έγραφε «12 + 5z B20». Την εποχή αυτή τα μαθηματικά καθώς και άλλα προβλήματα διατυπώνονται σχεδόν αποκλειστικά με μαθηματικά σύμβολα, γεγονός που συνετέλεσε στην αλματώδη πρόοδο της επιστήμης.*

1.3. Επίλυση τύπων

*Ο **Anders Celsius**, γεννήθηκε το 1701 στην Ουψάλα της Σουηδίας.*
Οι παππούδες του ήταν και οι δύο καθηγητές: ο Magnus Celsius, μαθηματικός και ο Anders Spole, αστρονόμος. Ο πατέρας του Nils Celsius ήταν επίσης καθηγητής της Αστρονομίας. Ο Κέλσιος θεωρήθηκε ταλαντούχος στα Μαθηματικά και σε νεαρή ηλικία (29 ετών το 1730) διορίστηκε καθηγητής Αστρονομίας.
Συμμετείχε το 1736 στη διάσημη αποστολή αστρονόμων στο Tornea, στο βορειότερο μέρος της Σουηδίας ("Η αποστολή του Lapland"). Ο στόχος της αποστολής ήταν να επιβεβαιωθεί η πεποίθεση του Newton, ότι η μορφή της Γης είναι ελλειψοειδής που γίνεται επίπεδη στους πόλους, πράγμα που επιτεύχθηκε με αποτέλεσμα να γίνει ο Κέλσιος διάσημος.
Για τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις του, κατασκεύασε τη γνωστή κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας, με 100 για το σημείο τήξης του νερού και 0 για το σημείο βρασμού του.
Μετά το θάνατό του, που προήλθε από φυματίωση το 1744 (σε ηλικία μόλις 43 ετών), η κλίμακα αντιστράφηκε στη σημερινή της μορφή. Δηλαδή 0 για το σημείο τήξης του νερού και 100 για το σημείο βρασμού του.

Σε πολλές επιστήμες χρησιμοποιούμε ισότητες που συνδέουν μεταξύ τους μεγέθη. Για παράδειγμα:
Στη Φυσική ο όγκος V με τη μάζα m και την πυκνότητα ρ συνδέονται με τον τύπο $m = \rho \cdot V$.
Στη Γεωμετρία ο όγκος V ενός παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, όπου α, β, γ είναι οι τρεις διαστάσεις του.
Στις τραπεζικές συναλλαγές ο τόκος ενός δανείου δίνεται από τον τύπο $T = \dfrac{K \cdot E \cdot t}{100}$, όπου Κ το κεφάλαιο, t ο χρόνος διάρκειας του δανείου και Ε το επιτόκιο της τράπεζας.
Όταν έχουμε έναν τύπο στον οποίο γνωρίζουμε τις τιμές που παίρνουν όλες οι μεταβλητές του εκτός από μία, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της άγνωστης μεταβλητής. Αυτό γίνεται, αν επιλύσουμε τον τύπο ως προς την άγνωστη μεταβλητή.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στις Αγγλοσαξονικές χώρες (κυρίως στις ΗΠΑ) για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Φαρενάιτ (°F). Στον υπόλοιπο κόσμο όμως -όπως και στη χώρα μας- χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Κελσίου (°C).
Η σχέση που συνδέει τους °F και τους °C, είναι: $\mathbf{F = 1{,}8C + 32}$

α) Ένας Αμερικανός που θέλει να ταξιδέψει στην Ελλάδα πληροφορείται ότι, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία 20°C. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε °F;

β) Ένας Έλληνας που θέλει να ταξιδέψει στη Νέα Υόρκη πληροφορείται ότι, εκεί έχει θερμοκρασία 41°F. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε °C;

Λύση

α) Όταν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία σε °C, είναι εύκολο να βρούμε την αντίστοιχη θερμοκρασία σε °F, γιατί ο τύπος **F = 1,8C + 32** "λειτουργεί αμέσως" (είναι λυμένος, όπως λέμε, ως προς F).

– Για $C = 20$ είναι:
$$F = 1{,}8 \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$$

Άρα, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία 68°F.

β) Όταν θέλουμε να μετατρέψουμε °F σε °C, τα πράγματα με τον τύπο $F = 1{,}8C + 32$ είναι λίγο πιο δύσκολα:

– Για $F = 41$ είναι $41 = 1{,}8C + 32$ και στη συνέχεια πρέπει να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς C:

$$41 - 32 = 1{,}8C$$
$$9 = 1{,}8C$$
$$\frac{9}{1{,}8} = \frac{1{,}8C}{1{,}8}$$
$$5 = C$$

Άρα, στη Νέα Υόρκη έχει θερμοκρασία 5°C.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Να μετατρέψετε σε βαθμούς Κελσίου τις θερμοκρασίες τριών ακόμα Αμερικανικών πόλεων:

Βοστώνη: 23°F *Βαλτιμόρη: 32°F* *Λος Άντζελες: 59°F*

Λύση

Θα πρέπει, βέβαια, να λύσουμε τρεις εξισώσεις όπως η παραπάνω! **Αντί να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία τρεις φορές, λύνουμε πρώτα τον τύπο F = 1,8C + 32 ως προς C:**

$$F - 32 = 1{,}8C \text{ ή } \frac{F-32}{1{,}8} = \frac{1{,}8C}{1{,}8}$$

Άρα: $C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$.

Ο τύπος $C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$ είναι ίδιος (ισοδύναμος) με τον τύπο F = 1,8C + 32, μόνο που «είναι λυμένος» ως προς C.

Επομένως:

– για F = 23 είναι $C = \dfrac{23-32}{1{,}8} = \dfrac{-9}{1{,}8} = -5$

– για F = 32 είναι $C = \dfrac{32-32}{1{,}8} = \dfrac{0}{1{,}8} = 0$

– για F = 59 είναι $C = \dfrac{59-32}{1{,}8} = \dfrac{27}{1{,}8} = 15$

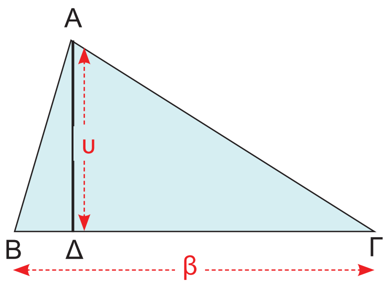
Διαπιστώσαμε ότι, αν έχουμε μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές, μπορούμε (χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που μάθαμε στις εξισώσεις) να λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς μία μεταβλητή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση β και ύψος υ, γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}βυ$. Να λύσετε τον τύπο αυτόν ως προς β και ως προς υ. Στη συνέχεια να βρείτε:

α) Το ύψος ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 12 cm² και βάση 4 cm.

β) Τη βάση ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 35 cm² και ύψος 7 cm.



Λύση: Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών: $2E = 2\,\frac{1}{2}βυ$.

Άρα: $2E = βυ$.

Για να λύσουμε ως προς β, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το υ, οπότε: $\beta = \frac{2E}{\upsilon}$.

Για να λύσουμε ως προς υ, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το β, οπότε: $\upsilon = \frac{2E}{\beta}$.

α) Από τον τύπο $\upsilon = \frac{2E}{\beta}$ για Ε = 12 και β = 4 έχουμε: $\upsilon = \frac{2E}{\beta} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$ (cm).

β) Από τον τύπο $\beta = \frac{2E}{\upsilon}$ για Ε = 35 και υ = 7 έχουμε: $\beta = \frac{2E}{\upsilon} = \frac{2 \cdot 35}{7} = \frac{70}{7} = 10$ (cm).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

		Α	Β	Γ	Δ
1.	Η σχέση **3α = βγ**, αν λυθεί ως προς α, γίνεται:	$\alpha=\beta\gamma-3$	$\alpha=3\beta\gamma$	$\alpha = \frac{\beta\gamma}{3}$	$4x$
2.	Η σχέση **α = β+γδ**, αν λυθεί ως προς β, γίνεται:	$\beta=\gamma\delta-\alpha$	$\beta=\alpha-\gamma\delta$	$\beta = \frac{\alpha}{\gamma\delta}$	$\beta = \frac{\gamma\delta}{\alpha}$
3.	Η σχέση **α = β + γδ**, αν λυθεί ως προς γ, γίνεται:	$\gamma=\alpha-\beta-\delta$	$\gamma=\frac{\alpha}{\beta}-\delta$	$\gamma = \frac{\alpha-\beta}{\delta}$	$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\delta}$
4.	Η σχέση $\boldsymbol{\alpha = \beta\left(1+\frac{\gamma}{\delta}\right)}$, αν λυθεί ως προς γ, γίνεται:	$\gamma = \frac{(\alpha-\beta)\delta}{\beta}$	$\gamma=(\alpha-\beta)\delta$	$\gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta}$	$\gamma=(\alpha-\beta-1)\delta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να επιλύσετε τους παρακάτω τύπους των Μαθηματικών και της Φυσικής ως προς τη μεταβλητή που ζητείται:

1 Μήκος κύκλου:
$L = 2\pi\rho$, ως προς ρ.

2 Περίμετρος ορθογωνίου:
$P = 2x + 2y$, ως προς y.

3 Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου: $E = 2\pi\rho\upsilon$, ως προς ρ.

4 Εξίσωση ευθείας:
$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, ως προς y, με $\beta \neq 0$

5 Εμβαδόν παραλληλεπιπέδου:
$E = 2(xy + y\omega + \omega x)$ ως προς ω.

6 Ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: $\upsilon = \frac{S}{t}$ ως προς t.

7 Εμβαδόν τραπεζίου:
$E = \left(\frac{\beta + B}{2}\right)\upsilon$, ως προς β.

8 $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$, ως προς λ.

9 $P = P_0 + \varepsilon h$, ως προς h.

10 $Q = mc\theta$, ως προς c.

11 $F = k_C \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, ως προς q_1.

12 $S = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, ως προς υ_0.

13 Για ένα ιδεώδες αέριο σε κανονική πίεση, ο όγκος του σε θερμοκρασία θ °C δίνεται από τον τύπο:

$$V = V_0\left(1 + \frac{\theta}{273{,}15}\right),$$

όπου V_0 ο όγκος στους 0 °C.

α) Να λύσετε τον τύπο αυτό ως προς θ.

β) Στους 0°C ένα ιδεώδες αέριο έχει όγκο V_0 = 25 cm^3. Σε ποια θερμοκρασία έχει όγκο 30 cm^3;

14 Εμπειρικές μελέτες για τη χιονόπτωση στη Βρετανία κατέληξαν στο εξής συμπέρασμα: ο αριθμός D των ημερών ενός έτους στη διάρκεια των οποίων πέφτει χιόνι, δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο:

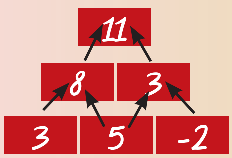
$D = 0{,}155 \cdot h + 11$, όπου h είναι το υψόμετρο ενός τόπου σε μέτρα.

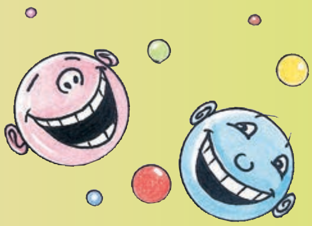
α) Σύμφωνα με αυτό τον τύπο, πόσες ημέρες χιονίζει σε έναν τόπο που είναι παραθαλάσσιος (h = 0);

β) Σε ποιο υψόμετρο χιονίζει 6 μήνες το χρόνο (180 ημέρες) και σε ποιο υψόμετρο χιονίζει κάθε ημέρα;

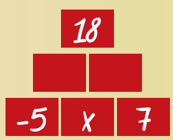
ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

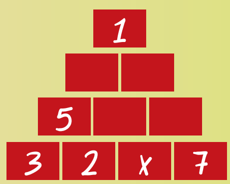
Στην παρακάτω πυραμίδα κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται ακριβώς από κάτω του, όπως φαίνεται στο παράδειγμα.



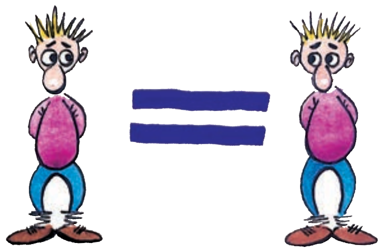


Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό x στις παρακάτω πυραμίδες;





1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων



Στην καθημερινή ζωή παρουσιάζονται πολλές φορές προβλήματα με αριθμούς, που η επίλυσή τους είναι πολύ συχνά επίπονη και πολύπλοκη. Στην παράγραφο αυτή, θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε μεταβλητές και εξισώσεις, για να απλοποιούμε τη λύση τέτοιων προβλημάτων.
Έχουμε μάθει σε προηγούμενες τάξεις να λύνουμε μερικά από τα προβλήματα αυτά με τη βοήθεια της πρακτικής Αριθμητικής.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στον αστερισμό της Δόξας!

Στις 14 Ιουνίου 1987 η εθνική μας ομάδα μπάσκετ κατέκτησε το Πανευρωπαϊκό Πρωτάθλημα νικώντας στο στάδιο Ειρήνης και Φιλίας, στον τελικό, την πανίσχυρη ομάδα της τότε Σοβιετικής Ένωσης με 103-101. Πρωταγωνιστής και σούπερ - σταρ της βραδιάς ήταν ο Νίκος Γκάλης που πέτυχε 40 πόντους. Ο Γκάλης είχε σε εκείνο τον αγώνα 22 εύστοχες βολές, από τις οποίες οι 8 ήταν βολές του 1 πόντου και οι υπόλοιπες 14 ήταν βολές των 2 ή των 3 πόντων.
Πόσα τρίποντα πέτυχε εκείνο το βράδυ ο Γκάλης;

Με πρακτική Αριθμητική:

Από τις 22 εύστοχες βολές οι 8 ήταν του 1 πόντου. Επομένως, οι υπόλοιπες 14 ήταν των 2 ή των 3 πόντων. Αν και οι 14 αυτές βολές ήταν των 2 πόντων, τότε ο Γκάλης θα είχε πετύχει εκείνο το βράδυ $8 \cdot 1 + 14 \cdot 2 = 8 + 28 = 36$ πόντους αντί για 40 που πέτυχε στην πραγματικότητα. Αφού πέτυχε $40 - 36 = 4$ επιπλέον πόντους, η διαφορά αυτή οφείλεται στα τρίποντα. Δηλαδή, πέτυχε 4 τρίποντα και $14 - 4 = 10$ δίποντα.

Λύση

Έχουμε τα εξής δεδομένα για τον Γκάλη:
- Πέτυχε συνολικά 40 πόντους.
- Είχε 22 εύστοχες βολές από τις οποίες:
  – 8 του 1 πόντου,
  – άγνωστος αριθμός βολών των 2 πόντων,
  – άγνωστος αριθμός βολών των 3 πόντων.

Το πρόβλημα ζητά να προσδιορίσουμε τον αριθμό των βολών των 3 πόντων που πέτυχε ο Γκάλης.

Έστω ότι είχε x επιτυχίες των 3 πόντων και $14 - x$ επιτυχίες των 2 πόντων. Αφού πέτυχε συνολικά 40 πόντους, έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 1 + (14 - x) \cdot 2 + x \cdot 3 &= 40 \\ 8 + 28 - 2x + 3x &= 40 \\ -2x + 3x &= 40 - 8 - 28 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Άρα, ο Γκάλης εκείνο το βράδυ πέτυχε 4 τρίποντα (και φυσικά $14 - 4 = 10$ δίποντα).
Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα:
$8 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 40$.
Από την παραπάνω δραστηριότητα συμπεραίνουμε ότι, η λύση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων περιλαμβάνει τα επόμενα γενικά βήματα:

- **Διαβάζουμε** καλά το πρόβλημα και **διακρίνουμε** τα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα.**
- **Χρησιμοποιούμε** ένα γράμμα **(συνήθως το x)** για να εκφράσουμε τον **άγνωστο αριθμό** που πρέπει να προσδιορίσουμε.
- Εκφράζουμε **όλα τα άλλα μεγέθη** του προβλήματος **με τη βοήθεια του x**.
- **Γράφουμε την εξίσωση** του προβλήματος **χρησιμοποιώντας τα δεδομένα** της εκφώνησης.
- **Λύνουμε** την εξίσωση.
- **Ελέγχουμε** αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον αριθμό που το διπλάσιό του, αν το ελαττώσσουμε κατά 8, δίνει τον αριθμό αυξημένο κατά 9.

Λύση: Ονομάζουμε τον άγνωστο αριθμό x. Το διπλάσιο είναι 2x.
Αν το ελαττώσσουμε κατά 8, είναι $2x - 8$.
Ο αριθμός αυξημένος κατά 9 είναι $x + 9$.
Συνδέουμε τα παραπάνω σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και προκύπτει η εξίσωση:

$$2x - 8 = x + 9 \quad \text{ή} \quad 2x - x = 9 + 8 \quad \text{ή} \quad x = 17$$

δηλαδή, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 17.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες;

Λύση: Έστω, ότι και οι δύο μαζί γεμίζουν την δεξαμενή σε x λεπτά. Αφού η πρώτη γεμίζει σε 10 λεπτά, σε ένα λεπτό θα γεμίζει το $\frac{1}{10}$ και σε x λεπτά τα $\frac{x}{10}$ της δεξαμενής. Ομοίως, η δεύτερη βρύση σε x λεπτά θα γεμίσει τα $\frac{x}{15}$ της δεξαμενής. Αφού και οι δύο μαζί θα γεμίσουν τη δεξαμενή, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1$$

$$30\frac{x}{10} + 30\frac{x}{15} = 30 \cdot 1$$

$$3x + 2x = 30$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Επομένως, και οι δύο βρύσες γεμίζουν τη δεξαμενή σε 6 λεπτά.

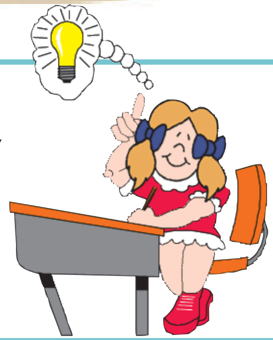
Με πρακτική Αριθμητική:

Η πρώτη βρύση σε ένα λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{10}$ της δεξαμενής και η δεύτερη το $\frac{1}{15}$.
Επομένως, και οι δύο μαζί γεμίζουν σε 1 λεπτό το

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

της δεξαμενής. Αφού σε 1 λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{6}$ της δεξαμενής, θα χρειαστούν 6 λεπτά για να τη γεμίσουν ολόκληρη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3



Η ανιψιά μου η Μαρίζα

Η ανιψιά μου η Μαρίζα έγραψε 16 και 18 σε δύο διαγωνίσματα Μαθηματικών.

α) Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 18 και στα τρία διαγωνίσματα;

β) Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19;

Λύση: Έστω x ο βαθμός που θα πάρει η Μαρίζα στο τρίτο διαγώνισμα. Ο μέσος όρος των τριών διαγωνισμάτων προκύπτει, αν διαιρέσουμε το άθροισμά τους δια 3, δηλαδή: $\frac{16 + 18 + x}{3}$.

α) Για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει:

$$\begin{aligned} \frac{16 + 18 + x}{3} &= 18 \\ 3 \cdot \frac{16 + 18 + x}{3} &= 3 \cdot 18 \\ 34 + x &= 54 \\ x &= 54 - 34 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Άρα, για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει να γράψει 20 στο τρίτο διαγώνισμα.

Ο αριθμός αυτός επαληθεύει το πρόβλημα, γιατί $\frac{16 + 18 + 20}{3} = 18$.

β) Για να βγάλει μέσο όρο 19, πρέπει $\frac{16 + 18 + x}{3} = 19$ άρα $34 + x = 57$ ή $x = 23$.

Φυσικά, επειδή δεν είναι δυνατόν να γράψει βαθμό 23 λέμε ότι, παρόλο που η εξίσωση λύθηκε, η λύση της **απορρίπτεται**.

Δηλαδή, είναι αδύνατον η Μαρίζα να βγάλει μέσο όρο 19.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Τρία αδέλφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη και ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη.

Να βρεθεί το αρχικό χρηματικό ποσό και το μερίδιο του καθενός.

Λύση: Έστω x το αρχικό ποσό.

- Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{5}x + 12$.
- Ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{4}x + 8$.
- Ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{3}x + 6$.

Το άθροισμα των τριών αυτών ποσών είναι το αρχικό ποσό x που μοιράστηκαν. Έτσι, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{5}x + 12 + \frac{1}{4}x + 8 + \frac{1}{3}x + 6 = x$$

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 26 = x$$

$$60\frac{x}{5} + 60\frac{x}{4} + 60\frac{x}{3} + 60 \cdot 26 = 60x$$

$$12x + 15x + 20x + 1560 = 60x$$

$$12x + 15x + 20x - 60x = -1560$$

$$-13x = -1560$$

$$x = \frac{-1560}{-13}$$

$$x = 120$$

Άρα, το αρχικό ποσό ήταν 120 €.

Ο μικρότερος πήρε $\frac{1}{5} \cdot 120 + 12 = 24 + 12 = 36$ €,

ο μεσαίος πήρε $\frac{1}{4} \cdot 120 + 8 = 30 + 8 = 38$ € και

ο μεγαλύτερος πήρε $\frac{1}{3} \cdot 120 + 6 = 40 + 6 = 46$ €.

Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα, αφού $36 + 38 + 46 = 120$.

Με πρακτική Αριθμητική:

Το $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ του συνολικού ποσού είναι τα $\frac{12}{60}+\frac{15}{60}+\frac{20}{60}=\frac{47}{60}$ του ποσού αυτού.

Άρα, το υπόλοιπο $\frac{13}{60}$ του ποσού είναι το άθροισμα $12 + 8 + 6 = 26$ €.

Αφού τα $\frac{13}{60}$ του ποσού είναι 26, το $\frac{1}{60}$ του ποσού αυτού θα είναι $26 : 13 = 2$ € και τα $\frac{60}{60}$ θα είναι $60 \cdot 2 = 120$€.

Επομένως, το ζητούμενο ποσό είναι 120€.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4 είναι ίσο με το 32. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

Α	$2x - 4 = 32$	Β	$2x + 32 = 4$
Γ	$4x - 2 = 32$	Δ	$2x + 4 = 32$

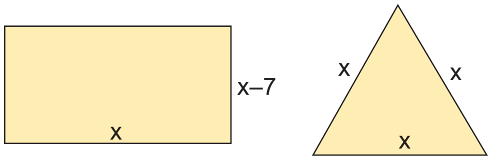
2. Ο Κώστας έχει 38 € και ο Γιάννης 14 €. Αγόρασαν από ένα σουβλάκι ο καθένας, οπότε τα χρήματα που έχει τώρα ο Κώστας είναι τριπλάσια από τα χρήματα που έχει ο Γιάννης. Πόσο κοστίζει κάθε σουβλάκι; Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

Α	$38 + x = 3x + 14$	Β	$38-x = 3(14-x)$
Γ	$14 - x = 3(38-x)$	Δ	$38 = 3 \cdot 14 + x$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αν η μία είναι διπλάσια της άλλης.

2 Στα παρακάτω σχήματα το ορθογώνιο και το τρίγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.



3 Ένας πατέρας είναι 44 ετών και ο γιος του είναι 8 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου;

4 Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

5 Το ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου περιέχει διπλάσια ποσότητα βενζίνης από το ρεζερβουάρ ενός άλλου αυτοκινήτου. Αν το πρώτο αυτοκίνητο καταναλώσει 34 λίτρα και το δεύτερο 7 λίτρα, θα μείνει ίδια ποσότητα βενζίνης στα δύο αυτοκίνητα. Πόσα λίτρα βενζίνης περιέχει κάθε αυτοκίνητο;

6 Δώδεκα μικρά λεωφορεία των 8 και 14 ατόμων μεταφέρουν συνολικά 126 επιβάτες. Πόσα λεωφορεία είναι των 8 και πόσα των 14 ατόμων;

7 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι 8 m και 12 m. Για να διπλασιάσουμε το εμβαδόν του, αυξάνουμε τη μεγαλύτερη διάσταση κατά 4 m. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε τη μικρότερη διάσταση;

8 Ο Πέτρος και ο Σάκης αμείβονται για την εργασία τους με την ώρα. Ο Πέτρος κερδίζει 2 € την ώρα περισσότερα από τον Σάκη. Όταν ο Πέτρος εργάζεται 7 ώρες και ο Σάκης 5 ώρες, ο Σάκης κερδίζει 26 € λιγότερα από τον Πέτρο. Να βρεθεί το ωρομίσθιο του καθενός.

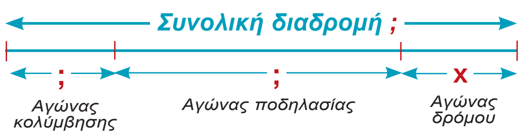
9 Όλα μου τα στιλό εκτός από 3 είναι μπλε, όλα μου τα στιλό εκτός από 4 είναι κόκκινα, όλα μου τα στιλό εκτός από 5 είναι μαύρα. Πόσα στιλό έχω;

10 Το τρίαθλο είναι ένα αγώνισμα που περιλαμβάνει έναν αγώνα κολύμβησης, έναν αγώνα ποδηλασίας και έναν αγώνα δρόμου. Η συνολική απόσταση που διανύει ένας αθλητής και στα τρία αγωνίσματα είναι 51,5 km. Ο αγώνας δρόμου

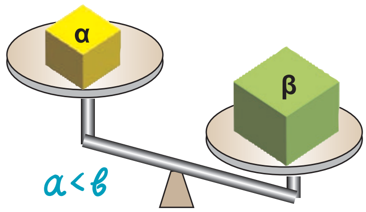
γίνεται σε μία απόσταση που είναι κατά 8,5 km μεγαλύτερη από την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας κολύμβησης. Ο αγώνας της ποδηλασίας γίνεται σε τετραπλάσια απόσταση απ' αυτήν του αγώνα δρόμου.

α) Υποθέτοντας ότι το ευθύγραμμο τμήμα x παριστάνει την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας δρόμου, να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε το σχήμα με τις πληροφορίες της εκφώνησης.

β) Ποια απόσταση διανύει ένας αθλητής σε κάθε αγώνισμα;

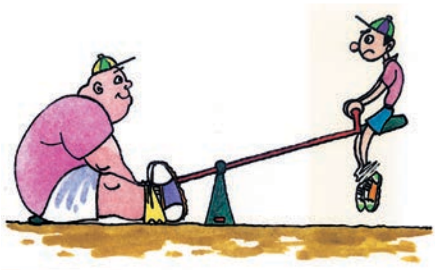


1.5. Ανισώσεις α΄ βαθμού



Ανισώσεις

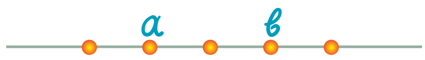
Όπως γνωρίζουμε, η σχέση που συνδέει τα βάρη μιας ζυγαριάς που δεν ισορροπεί, είναι μία **σχέση ανισότητας**. Για παράδειγμα, για τα βάρη α και β του διπλανού σχήματος έχουμε την ανισότητα: **α < β** ή ισοδύναμα, την ανισότητα **β > α.**



Μερικές φορές, επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο «$\leq$» ή το σύμβολο «$\geq$». Γράφουμε: **α $\leq$ β**, όταν είναι α = β ή α < β και διαβάζουμε: **«το α είναι μικρότερο ή ίσο του β»**.

Παρατήρηση:

Αν ένας αριθμός α είναι μικρότερος από τον αριθμό β, τότε ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών. Η ίδια ανισότητα βέβαια μπορεί να γραφεί και β > α, γιατί ο β βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον α.

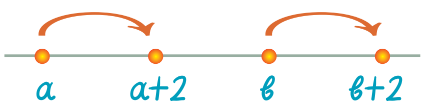


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται οι αριθμοί α και β του διπλανού σχήματος.
Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.

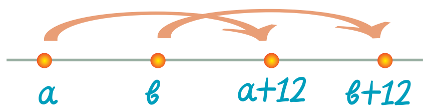
α) α ..... β   *β) α + 2 .... β + 2*
γ) α + 12 ..... β + 12   *δ) α – 7 ....β – 7*

Λύση



α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών, οπότε α < β.

β) Ο α + 2 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β + 2, οπότε α + 2 < β + 2.



γ) Ο α + 12 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β + 12, οπότε α + 12 < β + 12

δ) Ο α – 7 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β – 7, οπότε α – 7 < β – 7.

Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση, ισχύει:

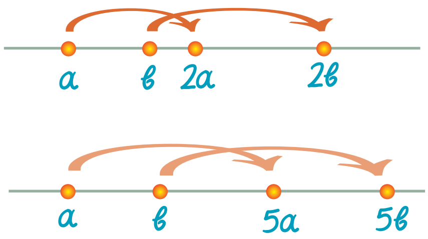
Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης **προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν **α < β** τότε **α + γ < β + γ** και **α – γ < β – γ**.
Αν **α > β** τότε **α + γ > β + γ** και **α – γ > β – γ**.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί α και β του σχήματος.
Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.

α) α ..... β   *β) 2α ..... 2β*   *γ) 5α 5β*



Λύση

α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β, οπότε α < β.

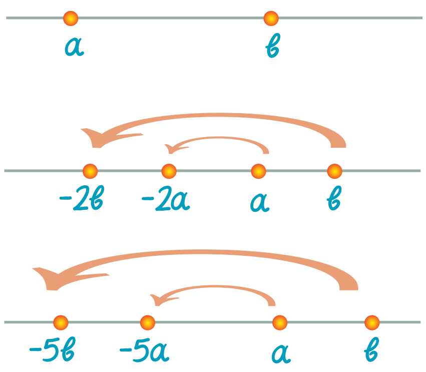
β) Ο 2α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον 2β, οπότε 2α < 2β.

γ) Ο 5α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον 5β, οπότε 5α < 5β.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Δίνονται οι αριθμοί α και β του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.

α) α .... β β) –2α ..... –2β γ) –5α ..... –5β



Λύση

α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β, οπότε α < β.

β) Ο –2α βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον –2β, οπότε –2α > –2β.

γ) Ο –5α βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον –5β, οπότε –5α > –5β.

Γενικά, ισχύει για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση:

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την **ίδια φορά**. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha<\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma>0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

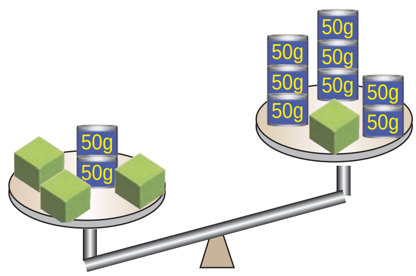
Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma>0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την **αντίστροφη φορά**. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha<\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma<0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma<0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

Επίλυση ανισώσεων



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4

Στο διπλανό σχήμα η ζυγαριά δεν ισορροπεί! Αν ονομάσουμε x το βάρος κάθε πράσινου κύβου (τα μπλε βαρίδια ζυγίζουν 50 γραμμάρια το καθένα):

α) Με τη βοήθεια του x να εκφράσετε με μια σχέση ανισότητας το γεγονός ότι η ζυγαριά δεν ισορροπεί.

β) Τι μπορούμε να πούμε για το βάρος x κάθε πράσινου κύβου;

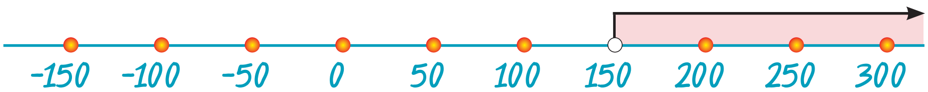
Λύση

α) Στον 1ο δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν 3 πράσινοι κύβοι και δύο βαρίδια των 50 γραμμαρίων, δηλαδή συνολικό βάρος $3x + 2 \cdot 50 = 3x + 100$ γραμμάρια.
Στον 2ο δίσκο υπάρχει 1 πράσινος κύβος και 8 βαρίδια των 50 γραμμαρίων δηλαδή, συνολικό βάρος $x + 8 \cdot 50 = x + 400$ γραμμάρια.
Ο 1ος δίσκος είναι πιο βαρύς, οπότε ισχύει: $3x + 100 > x + 400$.

β) Η ανισότητα αυτή που περιέχει τον άγνωστο x λέγεται ανίσωση. Για να βρούμε τον x ακολουθούμε παρόμοιο τρόπο με αυτόν που ακολουθήσαμε στην επίλυση εξισώσεων.

ΑΝΙΣΩΣΗ $3x + 100 > x + 400$	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΛΥΣΗΣ
$3x - x > 400 - 100$	Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
$2x > 300$	Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων
$\frac{2x}{2} > \frac{300}{2}$	Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου
$x > 150$	Απλοποιούμε τα κλάσματα

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, από την ανίσωση που βρήκαμε ($x > 150$) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πόσο ακριβώς ζυγίζει κάθε πράσινος κύβος, συμπεραίνουμε όμως ότι το βάρος του είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερο από 150 γραμμάρια. Μπορεί να είναι 150,1 γραμμάρια, μπορεί να είναι 200 γραμμάρια ή μπορεί να είναι 1.000 κιλά! Δηλαδή, όταν λύνουμε μία ανίσωση, συνήθως δε βρίσκουμε μία μόνο λύση, αλλά άπειρες! Γι' αυτό παριστάνουμε αυτές τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το λευκό κυκλάκι πάνω ακριβώς από το 150 δείχνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.

Μια ανισότητα που περιέχει έναν άγνωστο x, λέγεται **ανίσωση** με έναν άγνωστο.

Ο τρόπος που ακολουθούμε για να λύσουμε μια ανίσωση, είναι παρόμοιος με τον τρόπο που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων. Δηλαδή:

- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Κάνουμε αναγωγές ομοίων ορων.
- Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου. Αν ο συντελεστής είναι θετικός η ανισότητα δεν αλλάζει φορά, ενώ αν είναι αρνητικός **πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λύσετε την ανίσωση $2(x - 1) - 3(x + 1) \leq 4(x + 2) + 12$.
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση: Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$2x - 2 - 3x - 3 \leq 4x + 8 + 12$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

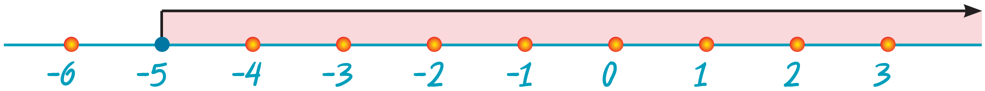
$2x - 3x - 4x \leq 8 + 12 + 2 + 3$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$-5x \leq 25$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{25}{-5}$ ← Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου. **Προσοχή όμως!** Διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό γι' αυτό αλλάξαμε φορά στην ανίσωση.

$x \geq -5$

Στη συνέχεια, παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η μπλε τελεία ακριβώς πάνω στο –5 σημαίνει ότι και ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.



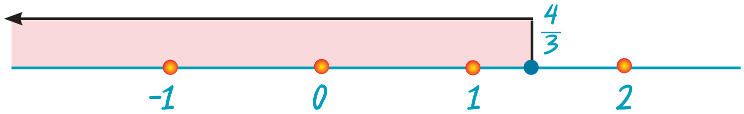
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{5-x}{4} + \frac{x+2}{8} \geq x$.
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση: Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$8\,\frac{5-x}{4} + 8\,\frac{x+2}{8} \geq 8x$$
$$2\,(5-x) + x + 2 \geq 8x$$
$$10 - 2x + x + 2 \geq 8x$$
$$-2x + x - 8x \geq -10 - 2$$
$$-9x \geq -12$$
$$\frac{-9x}{-9} \leq \frac{-12}{-9}$$
← Διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό, γι' αυτό αλλάξαμε φορά στην ανίσωση.
$$x \leq \frac{4}{3}$$

Στη συνέχεια, παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών:



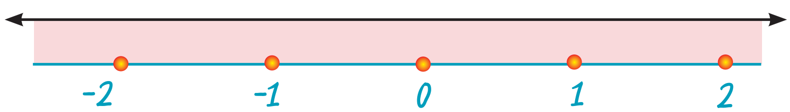
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να λύσετε την ανίσωση $2(x-1) - 3\,(x+2) < 4(x+1) - 5(x-2)$.
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση: Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2x - 2 - 3x - 6 < 4x + 4 - 5x + 10$$
$$2x - 3x - 4x + 5x < 4 + 10 + 2 + 6$$
$$0x < 22$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή **αληθεύει** για **κάθε τιμή** του αριθμού x. Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών θα είναι όλη η ευθεία.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να λύσετε την ανίσωση $x + 2 + 2(x - 3) > 3x + 4$.
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση: Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} x + 2 + 2x - 6 &> 3x + 4 \\ x + 2x - 3x &> 4 - 2 + 6 \\ 0x &> 8 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή **δεν αληθεύει** για **καμιά** τιμή του αριθμού x.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ανίσωση είναι **αδύνατη**.
Στην παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών δε θα σημειώσουμε τίποτα, γιατί κανένας αριθμός δεν είναι λύση αυτής της ανίσωσης.

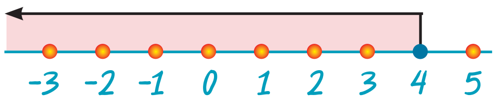
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων: $3x - 5 \leq x + 3$ και $4 < 14 + 5x$.
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Λύση: Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

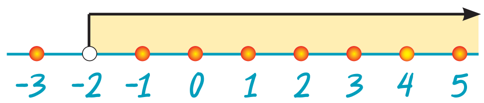
$$\begin{aligned} 3x - 5 &\leq x + 3 \\ 3x - x &\leq 3 + 5 \\ 2x &\leq 8 \\ \frac{2x}{2} &\leq \frac{8}{2} \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Η παράσταση των λύσεων της πρώτης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:

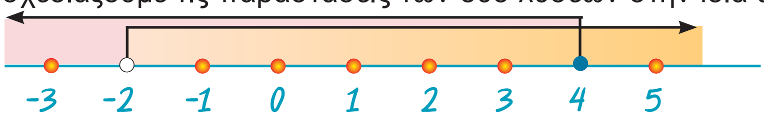


$$\begin{aligned} 4 &< 14 + 5x \\ 4 - 14 &< 5x \\ -10 &< 5x \\ \frac{-10}{5} &< \frac{5x}{5} \\ -2 &< x \end{aligned}$$

Η παράσταση των λύσεων της δεύτερης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:



Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.



Όπως βλέπουμε από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα στο -2 και στο 4. Άρα, είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει: $-2 < x \leq 4$.

Παρατήρηση: *Η σχέση* $\boldsymbol{-2 < x \leq 4}$ *είναι μια* ***διπλή ανίσωση****, γιατί ισχύουν συγχρόνως* ***και η*** $\boldsymbol{x > -2}$ ***και η*** $\boldsymbol{x \leq 4}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+1}{3} \leq 2 \leq \dfrac{3-x}{2}$.

Λύση: Η ανίσωση $\dfrac{x+1}{3} \leq 2 \leq \dfrac{3-x}{2}$ χωρίζεται σε δύο ανισώσεις, οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα ή όπως λέμε, να **συναληθεύουν**: $\dfrac{x+1}{3} \leq 2$ και $2 \leq \dfrac{3-x}{2}$.

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x+1}{3} \le 2$$

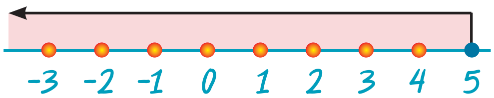
$$3 \cdot \frac{x+1}{3} \le 3 \cdot 2$$

$$x + 1 \le 6$$

$$x \le 6 - 1$$

$$x \le 5$$

Η παράσταση των λύσεων της πρώτης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:



$$2 \le \frac{3-x}{2}$$

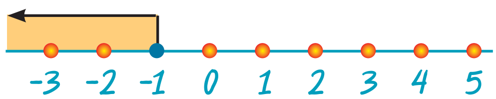
$$2 \cdot 2 \le 2 \cdot \frac{3-x}{2}$$

$$4 \le 3 - x$$

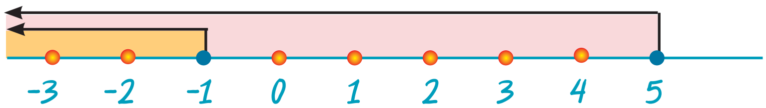
$$x \le 3 - 4$$

$$x \le -1$$

Η παράσταση των λύσεων της δεύτερης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:



Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.



Όπως βλέπουμε από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται από το –1 και αριστερά. Άρα, είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει: $x \le -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) Αν $x < 3$, τότε $x + 3$	β) Αν $x < -3$, τότε $\frac{x}{2}$ ....
γ) Αν $x > 5$, τότε $x - 3$	δ) Αν $x \le 6$, τότε $\frac{x}{-3}$ ....
ε) Αν $x \ge -2$, τότε $2x$	στ) Αν $x < 4$, τότε $\frac{3x}{2}$ ....
ζ) Αν $x < 7$, τότε $-3x$	η) Αν $x \le -\frac{1}{2}$, τότε $-4x$ ....

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

α) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - 16 < \beta - 16$.

β) Αν $\alpha < \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$.

γ) Αν $\alpha < 0$ τότε $2\alpha < \alpha$.

δ) Αν $\alpha > 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$.

ε) Αν $\alpha < 5$ τότε $\alpha < 8$.

στ) Η ανίσωση $3x - 5 > 7$ έχει λύση τον αριθμό $x = 4$.

ζ) Η ανίσωση $x + 500 > x + 499$ αληθεύει για κάθε αριθμό x.

η) Η ανίσωση $x + 500 > x + 501$ αληθεύει για κάθε αριθμό x.

θ) Η ανίσωση $2x - 3 < 3x - 2$ έχει λύσεις τους αριθμούς $x < 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:
α) $8x + 4 \leq 16 + 5x$
β) $x + 3 > -2$
γ) $-(1 - x) > 2x - 1$
δ) $-7x + 3 \leq 4 - x$

2 Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:
α) $3(\omega - 1) > \omega - 2$
β) $2x + 2 - (x - 2) \geq 4 - x$
γ) $3y - 1 - (y + 2) < 2(y + 2) + 1$
δ) $4(t + 5) < t - 4$

3 Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:
α) $\frac{3x-4}{4} - \frac{2-x}{3} > 1$
β) $2(x + 1) - \frac{3}{2}(x + 1) > \frac{x}{2}$
γ) $x + 3 + \frac{x+2}{2} - \frac{x+1}{3} > 0$
δ) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3}\right) - \frac{x+7}{6} > 2$
ε) $\omega - \frac{\omega-2}{2} < \frac{\omega-1}{2} - \frac{\omega-3}{4}$
στ) $t + \frac{t+1}{4} > \frac{2t-1}{7} + \frac{27t}{28}$

4 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
α) $x - 4 < 1$ και $2 - x < 3$
β) $2(x + 1) + x > 6 - 2x$ και
$7x - 8 > 3(x + 3) + 7$
γ) $3x - 1 > 2(1 - x) + 7$ και
$3(1 - x) \geq 6$
δ) $3y - 15 > \frac{2}{5}(y + 2)$ και
$\frac{2}{3}y - \frac{5}{21} < y - 5$
ε) $2x - 1 < 7$ και
$3(x - 1) > -6$ και
$x \geq 3(x - 2)$
στ) $\frac{3x-1}{2} > \frac{2x+1}{3}$ και
$2(3x - 1) + x > -2(x + 5) - 1$ και
$3 + x < 2(x - 3)$

5 Να λύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:
α) $-7 < 2x + 1 \leq 19$
β) $-1 < 1 - 2x < 3$
γ) $3 \leq 5x + 1 \leq 8$

6 Για ποιες τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού μ, έχουμε ότι ο $Α = 2(\mu - 3) - 4$ είναι αρνητικός;

7 Για ποιες τιμές του αριθμού α, η ανίσωση $2x - 3\alpha + 1 > \alpha(x - 1)$ έχει λύση τον αριθμό $x = 2$;

8 Η Άννα είχε τριπλάσια χρήματα από τη Μαρία, αλλά δαπάνησε 14 € και τώρα έχει λιγότερα από τη Μαρία. Να αποδείξετε ότι η Μαρία έχει λιγότερα από 7 €.

9 Ο Γιώργος έχει γράψει δύο διαγωνίσματα με βαθμούς 12 και 14. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο επόμενο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο πάνω από 14;

10 Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας «Parlanet» προτείνει στους πελάτες της δύο «πακέτα» συνδρομής:

1ο: πάγιο 7,50 € τον μήνα και χρέωση 0,254 € το λεπτό.
2ο: πάγιο 15 € τον μήνα και χρέωση 0,204 € το λεπτό.
Από πόσο χρόνο ομιλίας και πάνω συμφέρει το 2ο πακέτο;

11 Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 80 m, περίμετρο μικρότερη από 240 m και εμβαδόν μεγαλύτερο από 3000 m^2. Πόσα μέτρα μπορεί να είναι το πλάτος του;

Επανάληψη Κεφαλαίου 1

Εξισώσεις – Ανισώσεις

Επιμεριστική ιδιότητα:

- $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$
- $\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$

Αν προσθέσουμε, αφαιρέσουμε, πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα. Δηλαδή:

Αν $\alpha = \beta$, τότε:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$$
$$\alpha - \gamma = \beta - \gamma$$
$$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \text{ και}$$
$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}, \text{ με } \gamma \neq 0$$

Σε μια εξίσωση ή ανίσωση μπορούμε να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.

Για να λύσουμε μία εξίσωση, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- **Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.**
- **Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.**
- **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.**
- **Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.**

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξίσωσης, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- **Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και διακρίνουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.**
- **Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.**
- **Εκφράζουμε όλα τα άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.**
- **Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.**
- **Λύνουμε την εξίσωση.**
- **Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.**

Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \gamma < \beta + \gamma}$ και $\boldsymbol{\alpha - \gamma < \beta - \gamma}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανίσωση με την **ίδια** φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}}$, όταν $\boldsymbol{\gamma > 0}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανίσωση με την **αντίστροφη** φορά. Δηλαδή:

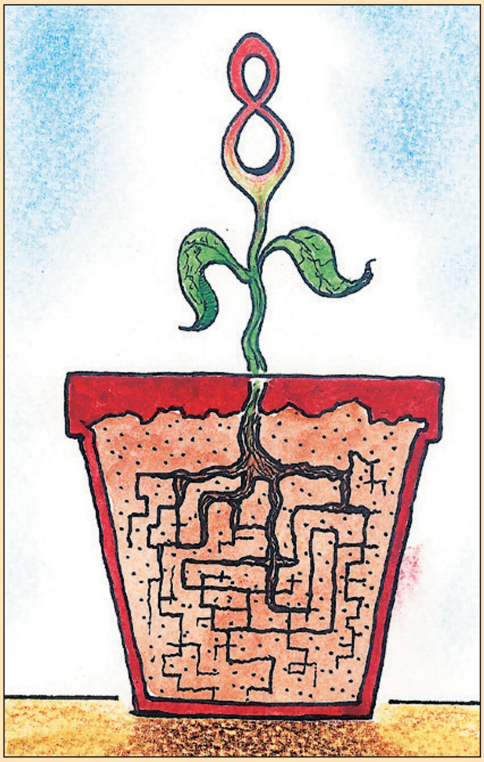
Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}}$, όταν $\boldsymbol{\gamma < 0}$.

Για να λύσουμε μια ανίσωση, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της επίλυσης εξισώσεων, αλλά πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα **να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης, όταν διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό.**

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Πραγματικοί αριθμοί



Εισαγωγικο Σημειωμα

Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει φυσικούς, ακέραιους και ρητούς αριθμούς.

Στους τελευταίους είχαμε εξετάσει τη δεκαδική τους παράσταση, η οποία ήταν γνωστή σε απλή ή περιοδική μορφή.

Υπάρχει όμως και ένα άλλο σύνολο αριθμών, οι άρρητοι, τους οποίους εξετάζουμε στο κεφάλαιο αυτό.

Οι άρρητοι μαζί με τους ρητούς σχηματίζουν τους πραγματικούς αριθμούς, οι οποίοι τοποθετούνται με πλήρη τρόπο πάνω σε μια ευθεία που την ονομάζουμε ευθεία των πραγματικών αριθμών. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την εφαρμογή προσεγγίσεων των άρρητων στην επίλυση προβλημάτων.

2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η Πηνελόπη έγινε αρχιτέκτων! Πήρε επιτέλους το δίπλωμά της και γεμάτη όρεξη ρίχνεται στην πρώτη της δουλειά! Πρέπει να χτίσει ένα σπίτι με τετραγωνική βάση σε ένα γωνιακό οικόπεδο. Αφού ρώτησε την Πολεοδομία, πληροφορήθηκε ότι στο συγκεκριμένο οικόπεδο μπορεί κανείς να χτίσει σπίτι εμβαδού 289 m^2. Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς της τετραγωνικής βάσης του σπιτιού;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $Ε = x^2$.
Άρα πρέπει $x^2 = 289$. Δηλαδή, πρέπει να βρούμε έναν αριθμό x, του οποίου το τετράγωνο να είναι 289.

- Μήπως είναι $x = 10$;
  Τότε όμως $x^2 = 10^2 = 100$ (θέλει πιο πολύ).
- Μήπως είναι $x = 20$;
  Τότε όμως $x^2 = 20^2 = 400$ (θέλει πιο λίγο).
- Μήπως είναι $x = 15$;
  Τότε όμως $x^2 = 15^2 = 225$ (θέλει λίγο πιο πολύ).
- Μήπως είναι $x = 17$;
  Τότε $x^2 = 17^2 = 289$ (αυτό είναι!).

Το σπίτι θα έχει τετραγωνική βάση, πλευράς 17 (m).

Ο θετικός αριθμός 17, του οποίου το τετράγωνο ισούται με 289, ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα του 289** και συμβολίζεται με $\sqrt{289}$. Δηλαδή **$\sqrt{289} = 17$.**

Γενικά:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{α}$.

Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.

Για παράδειγμα: $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ γιατί $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

$\sqrt{0,64} = 0,8$ γιατί $0,8^2 = 0,64$

$\sqrt{17,64} = 4,2$ γιατί $4,2^2 = 17,64$

Σχόλια:

➤ ***Δεν ορίζουμε*** *ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός. Για παράδειγμα η* $\sqrt{-25}$ ***δεν έχει νόημα****, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα –25.*

➤ *Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, προκύπτει ότι:*

- **Αν $\sqrt{α} = x$, όπου $α \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = α$.**
- **Αν $α \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{α}\right)^2 = α$.**

➤ *Σύμφωνα με τα παραπάνω:*

α) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{25} = -5$, παρόλο που $(-5)^2 = 25$, καθώς $-5 < 0$.

β) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{(-5)^2} = -5$, καθώς $-5 < 0$. Το σωστό είναι $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τους αριθμούς: $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{121}$.

Λύση: Αν $x = \sqrt{25}$ τότε $x^2 = 25$. Άρα πρέπει να βρούμε έναν θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με 25. Με δοκιμές βρίσκουμε εύκολα ότι $5^2 = 25$, δηλαδή $x = 5$.
Άρα $\sqrt{25} = 5$.
Ομοίως, βρίσκουμε ότι:
$\sqrt{49} = 7$ γιατί $7^2 = 49$, $\sqrt{64} = 8$ γιατί $8^2 = 64$, $\sqrt{121} = 11$ γιατί $11^2 = 121$.

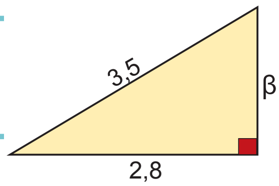
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες: α) $\sqrt{16}$, *β)* $\sqrt{0{,}16}$, *γ)* $\sqrt{0{,}0016}$.

Λύση:
α) Γνωρίζουμε ότι $4^2 = 16$. Άρα $\sqrt{16} = 4$.
β) Γνωρίζουμε ότι $(0{,}4)^2 = 0{,}16$. Άρα $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$.
γ) Γνωρίζουμε ότι $(0{,}04)^2 = 0{,}0016$. Άρα $\sqrt{0{,}0016} = 0{,}04$.

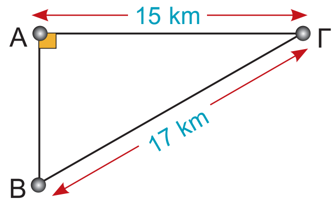
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος.



Λύση: Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$β^2 + 2{,}8^2 = 3{,}5^2$ ή $β^2 + 7{,}84 = 12{,}25$ ή
$β^2 = 12{,}25 - 7{,}84$ ή $β^2 = 4{,}41$
Επομένως: $β = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ γιατί $2{,}1^2 = 4{,}41$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4



Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;

Λύση: Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ ή $ΑΒ^2 + 15^2 = 17^2$ ή
$ΑΒ^2 + 225 = 289$ ή $ΑΒ^2 = 289 - 225$ ή
$ΑΒ^2 = 64$ οπότε $ΑΒ = \sqrt{64}$ ή $ΑΒ = 8$

Επομένως, η πόλη Α απέχει 8 km από την πόλη Β.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Για τους x, y ισχύει: $y = \sqrt{x}$. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

		Α	Β	Γ
α)	Ο x είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
β)	Ο y είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
γ)	Ισχύει η σχέση:	$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

2. Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει λύσεις:
Α: μόνο το 4 Β: μόνο το –4 Γ: το 4 και το –4.

3. Στον διπλανό πίνακα να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμό της στήλης Α την τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
9	16
	3
16	2
	8
4	5
25	18
	6
36	4

4. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

α) $\sqrt{16} = 8$ β) $\sqrt{4} = 16$
γ) $\sqrt{9} = 3$ δ) $\sqrt{0,4} = 0,2$
ε) $\sqrt{-9} = -3$ στ) η $\sqrt{0}$ δεν υπάρχει
ζ) $\sqrt{4} = -2$ η) $\sqrt{16+9} = 5$
θ) $\sqrt{25-9} = 5 - 3 = 2$ ι) $\sqrt{100} = 50$

5. Αν x είναι ένας θετικός αριθμός, στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
1. Αν $\sqrt{x} = 5$, τότε	x = 10	x = 25	x = –25	x = 2,5	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
2. Αν $\sqrt{x} = 9$, τότε	x = 3	x = 81	x = 4,5	x = ±81	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
3. Αν $\sqrt{x} = -16$, τότε	x = 4	x = –4	x = 256	x = –8	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
4. Αν $\sqrt{100} = x$	x = 10	x = 50	x = 100	x = ±10	η σχέση αυτή είναι αδύνατη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

α) $\sqrt{81}$, $\sqrt{0,81}$, $\sqrt{8100}$.
β) $\sqrt{4}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{40000}$
γ) $\sqrt{121}$, $\sqrt{1,21}$, $\sqrt{12100}$, $\sqrt{0,0121}$
δ) $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt{\frac{144}{25}}$, $\sqrt{\frac{400}{49}}$, $\sqrt{\frac{36}{121}}$.

2 Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{36} =$ β) $\sqrt{18+18} =$
γ) $\sqrt{18 \cdot 18} =$ δ) $(\sqrt{18})^2 =$

3 Να τοποθετήσετε σε κάθε τετράγωνο έναν κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα.

α) $\sqrt{\frac{4}{\square}} = \frac{2}{3}$ β) $(\sqrt{\square})^2 = 5$

γ) $\sqrt{\square} + 3 = 6$ δ) $\sqrt{\square} + 2 = 11$

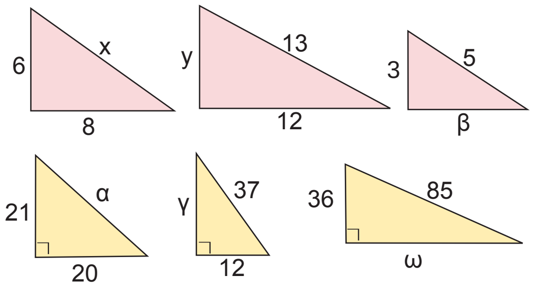
ε) $2 - \sqrt{\square} = 0$ στ) $(\sqrt{\square})^2 + \sqrt{\square} = 6$

4 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2$ β) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = 2$

γ) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 3$

5 Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων.

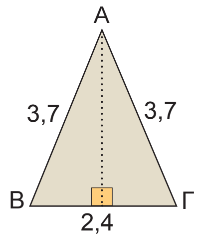


6 Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 9$ β) $x^2 = 25$

γ) $x^2 = 64$ δ) $x^2 = \frac{100}{81}$.

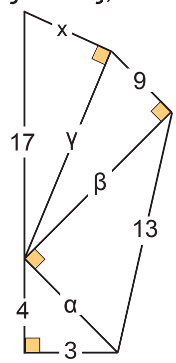
7 Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



8 Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου γηπέδου που έχει διαστάσεις 65 m και 72 m.

9 Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 8, γίνεται ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

10 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μήκος x.



11 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, α, α^2, στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α) Αν α > 1 π.χ. α = 4, α = 9, α = 16...

β) Αν 0<α<1 π.χ. $\alpha=\frac{1}{4}$, $\alpha=\frac{1}{9}$, $\alpha=\frac{1}{16}$,...

Τι παρατηρείτε;

12 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4				
36	49				

Τι συμπεραίνετε;

13 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16				
25	36				

Τι συμπεραίνετε;

14 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16				
64	36				

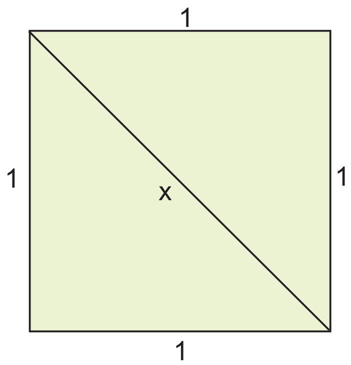
Τι συμπεραίνετε;

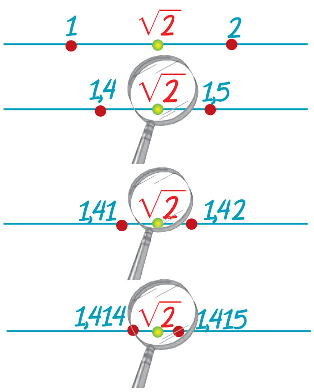
ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

1 Ρώτησαν έναν μαθηματικό του 20ού αιώνα πόσων ετών είναι. Αυτός απάντησε ως εξής:
«Η τετραγωνική ρίζα του έτους που γεννήθηκα είναι ακριβώς ίση με τη σημερινή μου ηλικία».
Πόσων ετών ήταν, πότε γεννήθηκε και ποια χρονολογία έγινε η ερώτηση;

2 Μπορείτε να αλλάξετε τη θέση ενός μόνο σπίρτου, ώστε να προκύψει μια πλήρης ισότητα;

2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί





Άρρητοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο.

Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ. περίπου) «αποκάλυψε» τον «άρρητο» $\sqrt{2}$.

Σύντομα βρέθηκαν και άλλοι άρρητοι αριθμοί. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών.

Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο x του τετραγώνου.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$.

Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, δηλαδή δεν είναι ρητός. Γι' αυτό λέγεται άρρητος.

Γενικά:

> Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός.

Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{array}{rcccl}
1 = 1^2 & < & 2 & < & 2^2 = 4 \\
1{,}96 = 1{,}4^2 & < & 2 & < & 1{,}5^2 = 2{,}25 \\
1{,}9881 = (1{,}41)^2 & < & 2 & < & (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \\
1{,}9994 = (1{,}414)^2 & < & 2 & < & (1{,}415)^2 = 2{,}0022 \\
1{,}99996 = (1{,}4142)^2 & < & 2 & < & (1{,}4143)^2 = 2{,}00024 \\
1{,}9999899 = (1{,}41421)^2 & < & 2 & < & (1{,}41422)^2 = 2{,}000018
\end{array}$$

....

Άρα: 

$$\begin{array}{rcl}
1 < & \sqrt{2} & < 2 \\
1{,}4 < & \sqrt{2} & < 1{,}5 \\
1{,}41 < & \sqrt{2} & < 1{,}42 \\
1{,}414 < & \sqrt{2} & < 1{,}415 \\
1{,}4142 < & \sqrt{2} & < 1{,}4143 \\
1{,}41421 < & \sqrt{2} & < 1{,}41422
\end{array}$$

....

Επομένως, τον αριθμό x = $\sqrt{2}$, που προσπαθούμε να βρούμε, δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε να προσεγγίσουμε τον $\sqrt{2}$ ως εξής:

Άρα:

Έχουμε:
με **προσέγγιση χιλιοστού**: $\sqrt{2}$ = 1,414
με **προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2}$ = 1,4142
με **προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2}$ = 1,41421 κ.ο.κ.
Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$**.

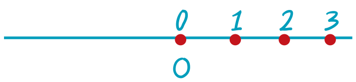
Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$,... είναι άρρητοι. Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π.

Σχόλιο:

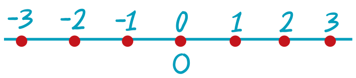
Τις τετραγωνικές ρίζες μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τη βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης ως εξής: Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα $\boxed{2}$ *και* $\boxed{\sqrt{\ }}$*, οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία. Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαμε ειδικούς πίνακες.*

Πραγματικοί αριθμοί

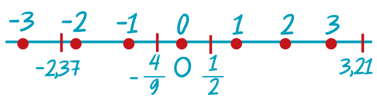
Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.



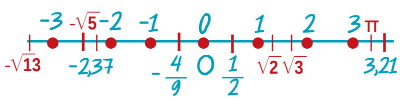
- Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία.
  Στην αρχή O έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).



- Οι ακέραιοι αριθμοί: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... παριστάνονται πάλι με σημεία.
  Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής O τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.



- Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{μ}{ν}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός.
  Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.



- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για τον λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{13}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

Λύση: Με διαδοχικές δοκιμές έχουμε:

Επειδή	$3^2 = 9$	και	$4^2 = 16$	είναι	$3 < \sqrt{13} < 4$.
Επειδή	$(3,6)^2 = 12,96$	και	$(3,7)^2 = 13,69$	είναι	$3,6 < \sqrt{13} < 3,7$.
Επειδή	$(3,60)^2 = 12,960$	και	$(3,61)^2 = 13,032$	είναι	$3,60 < \sqrt{13} < 3,61$.
Επειδή	$(3,605)^2 = 12,996$	και	$(3,606)^2 = 13,003$	είναι	$3,605 < \sqrt{13} < 3,606$.

Άρα η ρητή προσέγγιση του $\sqrt{13}$ είναι 3,605.

Σχόλιο: *Για την ακρίβεια λέμε ότι $\sqrt{13} = 3,605$ με έλλειψη και $\sqrt{13} = 3,606$ με υπερβολή.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Χρησιμοποιήστε ένα μικρούπολογιστή τσέπης για να βρείτε με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων τις τετραγωνικές ρίζες: α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{50}$, γ) $\sqrt{72}$, δ) $\sqrt{1764}$, ε) $\sqrt{427}$.

Λύση: Έχουμε ότι:

α) Πατώντας διαδοχικά τα πλήκτρα και $\boxed{3}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ στην οθόνη παρουσιάζεται ο αριθμός 1,7320508. Άρα, με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων ισχύει ότι: $\sqrt{3} = 1,732$.

β) Ομοίως $\sqrt{50} = 7,071$

γ) Ομοίως $\sqrt{72} = 8,485$

δ) Ομοίως $\sqrt{1764} = 42$

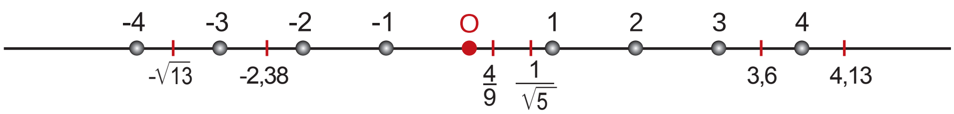
ε) Ομοίως $\sqrt{427} = 20,664$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$-4,\ -2,38,\ \frac{4}{9},\ -\sqrt{13},\ 4,13,\ 3,6,\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 1,\ 2.$

Λύση: Μπορούμε να γράψουμε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας τις ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων για τους άρρητους, οπότε έχουμε:



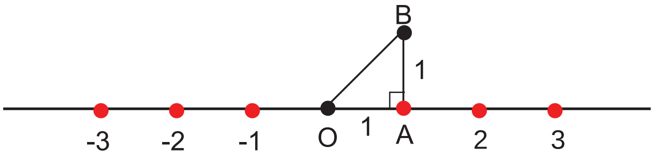
$$-4 < -\sqrt{13} = -3,61 < -3 < -2,38 < -2 < 0 < \frac{4}{9} = 0,\bar{4} < \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,45 < 1 < 2 < 3,6 < 4 < 4,13$$

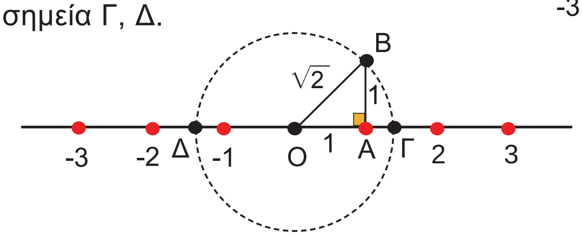
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

Λύση: Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ στον άξονα μήκους 1.
Το τρίγωνο ΟΑΒ που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ή $OB = \sqrt{2}$. Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ, Δ.





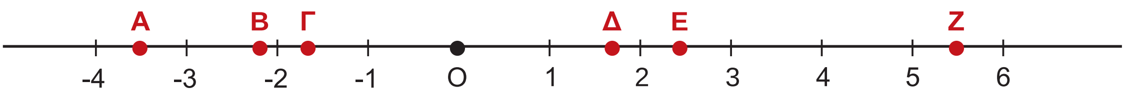
Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$, ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος $-\sqrt{2}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών, να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) $4 < \sqrt{4,5} < 5$			δ) $10 < \sqrt{21} < 11$		
β) $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$			ε) $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$		
γ) $7 < \sqrt{15} < 8$			στ) $2 < \sqrt{7} < 3$		

2. Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ. Στις παρακάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



α) Ο αριθμός $\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Α	Ε	Γ	Δ
β) Ο αριθμός $\sqrt{6}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	Ε	Ζ
γ) Ο αριθμός $-\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Β	Δ	Α
δ) Ο αριθμός $-\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	Γ	Δ	Β	Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;
α) $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^2$ β) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$
γ) $\sqrt{18}$, $\sqrt{\frac{18}{2}}$, $\sqrt{18^2}$

2 Τοποθετήστε σε μία σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:
α) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{2}$ β) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 2, $\sqrt{2}$
γ) $1+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ δ) $\sqrt{2}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

3 Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών:
α) $\sqrt{3}$, β) $\sqrt{5}$, γ) $\sqrt{7}$, δ) $\sqrt{8}$.

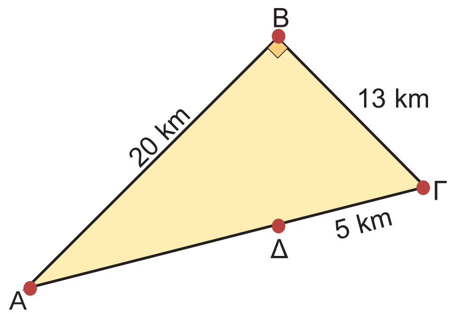
4 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 = 0$, β) $x^2 = 5$, γ) $x^2 = -3$, δ) $x^2 = 17$.

5 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 12 cm^2. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευράς του.

6 Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο 12 cm. Να βρείτε: α) το μήκος της πλευράς του με προσέγγιση δύο δεκαδικών, β) την ακριβή τιμή του εμβαδού του.

2.3. Προβλήματα

Όπως γνωρίζουμε, δε μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια την τιμή ενός άρρητου αριθμού. Σε διάφορα όμως προβλήματα της πραγματικής ζωής συναντάμε άρρητους αριθμούς για τους οποίους χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις δύο ή τριών δεκαδικών ψηφίων.



Πρόβλημα 1

Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις ΑΒ = 20 km, ΒΓ = 13 km και ΓΔ = 5 km. Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;

Λύση

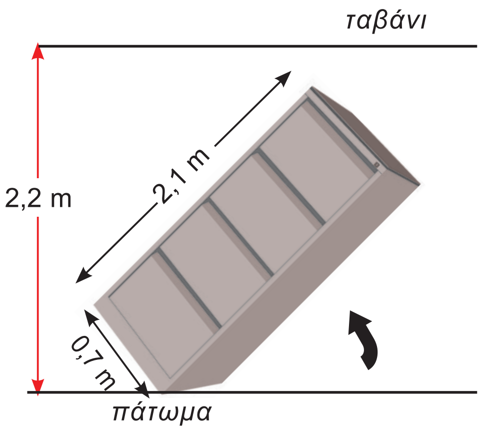
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

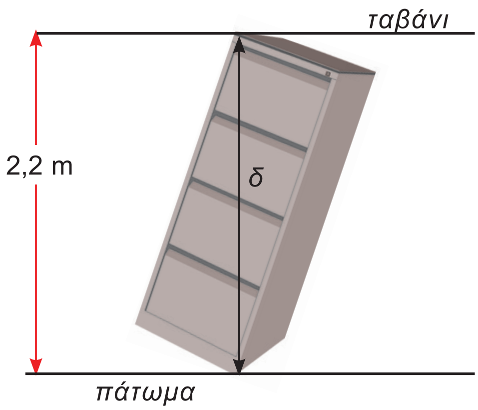
$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = 20^2 + 13^2$ ή

$ΑΓ^2 = 569$ ή $ΑΓ = \sqrt{569}$ ή

ΑΓ = 23,85 (km) με προσέγγιση εκατοστού.

Επομένως, ΑΔ = ΑΓ – ΔΓ = 23,85 – 5 = 18,85 (km).





Πρόβλημα 2

Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι του διπλανού σχήματος;

Λύση

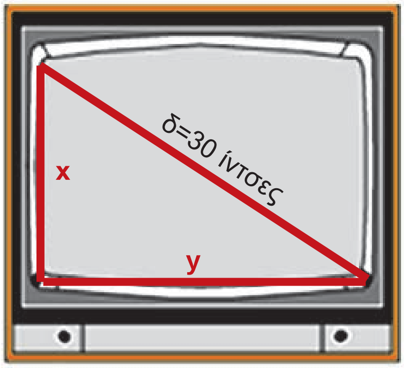
Αν η διαγώνιος δ είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το ύψος 2,2 m του δωματίου, τότε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$δ^2 = 2{,}1^2 + 0{,}7^2 = 4{,}41 + 0{,}49 = 4{,}90$.

Άρα $δ=\sqrt{4{,}90}=2{,}21$ (m) με προσέγγιση εκατοστού. Επομένως, δε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι, γιατί δ > 2,2 (m).

Πρόβλημα 3

Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x, y έχουν λόγο $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. *Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.*



Λύση

Αφού x, y είναι οι διαστάσεις της οθόνης και 30 ίντσες η διαγώνιος, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι: $x^2 + y^2 = 30^2$.

Από τα δεδομένα έχουμε $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, οπότε

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \quad ή \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{7}{16} \quad ή \quad x^2 = \frac{7}{16}y^2$$

και αντικαθιστώντας στο Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\frac{7}{16}y^2 + y^2 = 30^2 \quad ή \quad \frac{23}{16}y^2 = 30^2 \quad ή$$

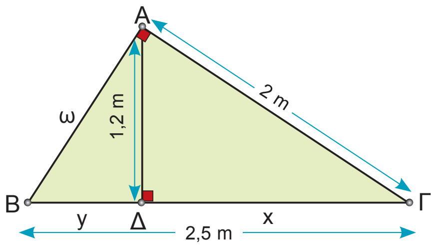
$$23y^2 = 14400 \quad ή \quad y^2 = \frac{14400}{23} \quad ή$$

$$y^2 = 626{,}08 \quad ή \quad y = 25{,}02 \text{ (ίντσες)}$$

$$\text{και } x = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 25{,}02 = 16{,}55 \text{ (ίντσες).}$$

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x, y και ω.



Λύση

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2$ ή

$2^2 = 1{,}2^2 + x^2$ ή

$x^2 = 2^2 - 1{,}2^2 = 4 - 1{,}44 = 2{,}56$.

Άρα $x = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$ (m).

Επίσης $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ$ ή

$2{,}5 = y + 1{,}6$ ή

$y = 2{,}5 - 1{,}6 = 0{,}9$ (m).

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

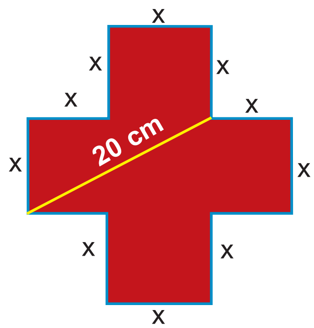
$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$ ή

$ω^2 = 1{,}2^2 + 0{,}9^2 = 1{,}44 + 0{,}81 = 2{,}25$.

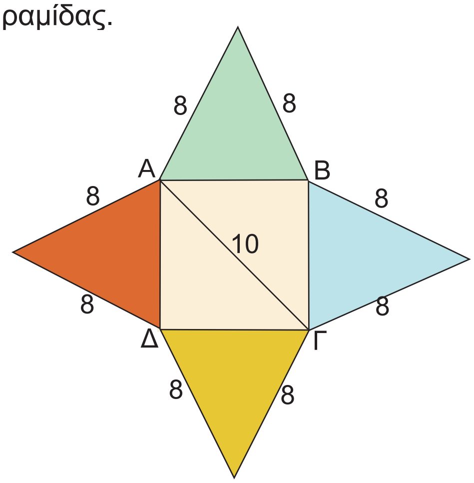
Άρα $ω = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ (m).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

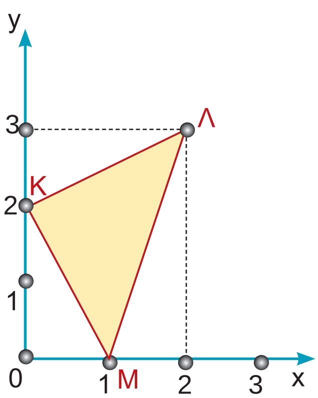
1 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σταυρού του σχήματος.



2 Το ανάπτυγμα σε χαρτόνι μιας πυραμίδας αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, που η διαγώνιός του είναι 10 cm και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα που οι ίσες πλευρές τους είναι 8 cm.
Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.



3 Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι Κ(0,2), Λ(2,3), Μ(1,0). Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



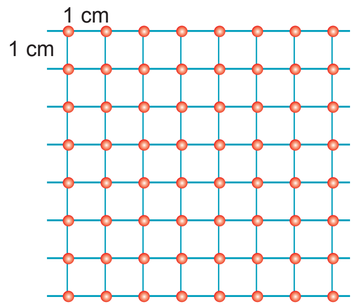
4 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12 cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

5 Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 10 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η τρίτη πλευρά του, ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. *(Υπόδειξη: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις).*

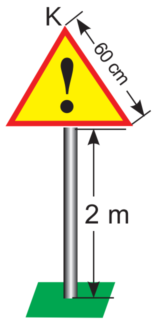
6 Οι κουκκίδες του παρακάτω σχήματος απέχουν 1 cm οριζόντια και κατακόρυφα.

α) Να ενώσετε δύο κουκκίδες, ώστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται να είναι:
i) $\sqrt{2}$ cm, ii) $\sqrt{5}$ cm, iii) $\sqrt{13}$ cm.

β) Να ενώσετε τέσσερις κουκκίδες, ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο με εμβαδόν:
i) 2 cm^2, ii) 5 cm^2, iii) 13 cm^2.

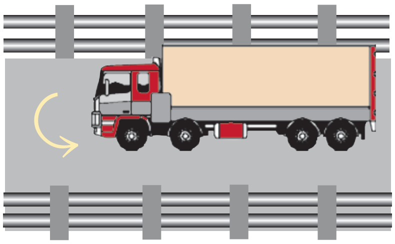


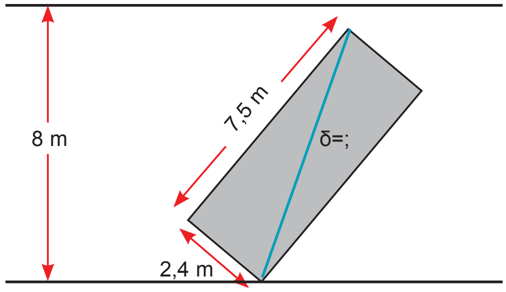
7 Το σήμα της φωτογραφίας έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 60 cm και στηρίζεται σε κολόνα ύψους 2 m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Κ της πινακίδας από το έδαφος.



8 Τα βέλη στην άσφαλτο αποτελούνται από ένα κίτρινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από ένα κίτρινο ισοσκελές τρίγωνο. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 20 cm και 2,3 m. Το τρίγωνο έχει βάση 60 cm και ίσες πλευρές 2,1 m. Πόσα περίπου τέτοια βέλη μπορούμε να βάψουμε με 1 κιλό κίτρινου χρώματος το οποίο μπορεί να καλύψει επιφάνεια 540 dm^2;

9 Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m. Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;





Επανάληψη Κεφαλαίου 2

Πραγματικοί αριθμοί

Τετραγωνική ρίζα

ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ένας θετικός αριθμός ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Συμβολίζεται με $\sqrt{α}$.

Ιδιότητες

Αν $\sqrt{α}$ **= x,** τότε x^2 **= α,** όπου οι αριθμοί **α** και **x** είναι **θετικοί** ή **ίσοι με μηδέν.**

Επομένως: $(\sqrt{α})^2 = α$

Άρρητοι αριθμοί

ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί, δηλαδή δε μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{μ}{ν}$, με μ, ν ακέραιους και $ν \neq 0$.

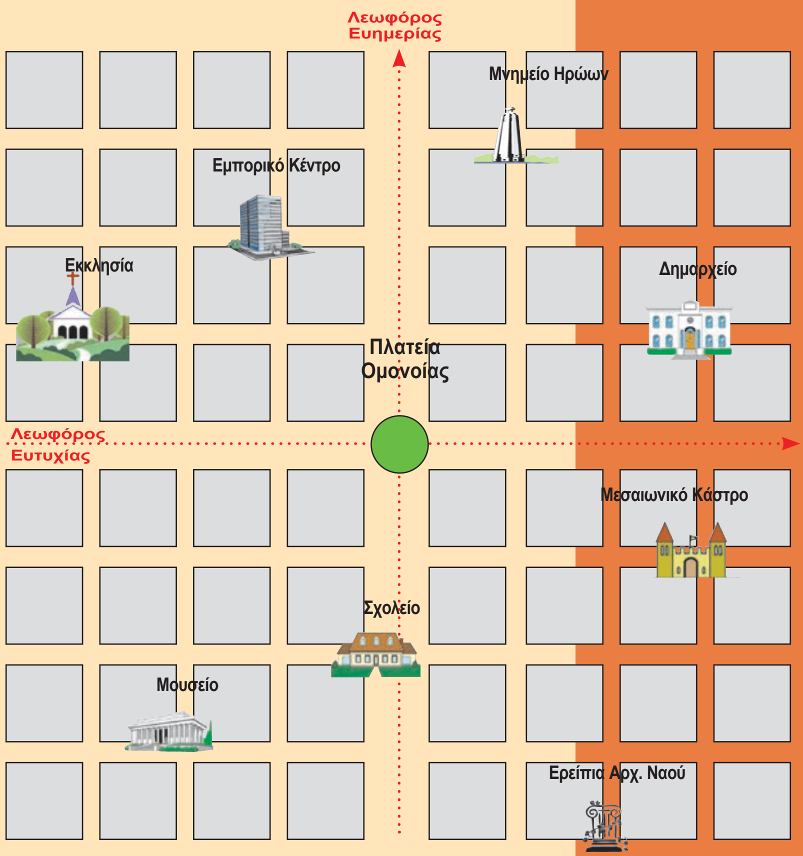
Πραγματικοί αριθμοί

ονομάζονται όλοι οι ρητοί και όλοι οι άρρητοι αριθμοί.

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Συναρτήσεις



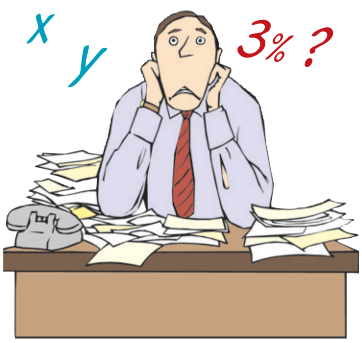
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η συνάρτηση αποτελεί θεμελιώδη έννοια των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε όλες τις θετικές επιστήμες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την έννοια της συνάρτησης και θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση συναρτήσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Θα εξετάσουμε έτσι τις συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις γραφικές παραστάσεις της ευθείας και της υπερβολής.

3.1. Η έννοια της συνάρτησης



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € τον μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;

β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

για τον πρώτο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24$ €,

για τον δεύτερο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33$ €.

β) Η αύξηση θα είναι: $\frac{3}{100} \cdot x = 0{,}03x$ δηλαδή $y = 0{,}03x$.

Παρατήρηση:

Η σχέση $y = 0{,}03x$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής x. Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό $x = 700$ €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$ €. Ομοίως, για $x = 1500$ βρίσκουμε αύξηση $y = 0{,}03 \cdot 1500 = 45$ €.

Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση).
Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **«η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x»**. Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $y = 0{,}03x$.

Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Έτσι, για τη συνάρτηση $y = 0{,}03x$ έχουμε:

Για $x = 700$, $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$.
Για $x = 800$, $y = 0{,}03 \cdot 800 = 24$.
Για $x = 900$, $y = 0{,}03 \cdot 900 = 27$.
Για $x = 1000$, $y = 0{,}03 \cdot 1000 = 30$.
Για $x = 1100$, $y = 0{,}03 \cdot 1100 = 33$.

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον διπλανό πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης $y = 0{,}03x$.

x	700	800	900	1000	1100
y	21	24	27	30	33

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x + 3$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–2	–1	0	1	2
y					

Λύση: Για $x = -2$: $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$.
Για $x = -1$: $y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$.
Για $x = 0$: $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
Για $x = 1$: $y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$.
Για $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

Άρα, ο πίνακας τιμών είναι:

x	–2	–1	0	1	2
y	–1	1	3	5	7

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.

α) Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;

β) Να εκφράσετε την ποσότητα y σε κιλά του λαδιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας x των ελιών που παράγει.

γ) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;

Λύση: α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 0,2 κιλά λάδι, από 500 κιλά ελιές θα πάρει $0{,}2 \cdot 500 = 100$ κιλά λάδι.

β) Από x κιλά ελιές θα πάρει 0,2x κιλά λάδι. Δηλαδή $y = 0{,}2x$.

γ) Από τη συνάρτηση $y = 0{,}2x$, για $y = 250$ κιλά λάδι έχουμε: $250 = 0{,}2x$ ή $x = \frac{250}{0{,}2} = 1250$. Άρα, θα πρέπει να παράγει 1250 κιλά ελιές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 20 € ο καθένας. Η σχέση που εκφράζει τον νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x, είναι:

α) $y = 20x$ β) $y = x + 20$ γ) $y = \frac{x}{20}$ δ) $y = 0{,}2x$

2. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 15%. Η σχέση που εκφράζει τον νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x, είναι:

α) $y = x + \frac{15}{100}$ β) $y = x + 15$ γ) $y = 1{,}15x$ δ) $y = 0{,}15x$

3. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y είναι 100 cm^2. Η σχέση που εκφράζει το μήκος του y ως συνάρτηση του x, είναι:

α) $y = 100x$ β) $y = 100 + x$ γ) $y = \frac{100}{x}$ δ) $y = 100 - x$

4. Δίνεται τετράγωνο πλευράς x. Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν Ε του τετραγώνου ως συνάρτηση του x είναι:
α) $E = 2x$ β) $E = x^2$ γ) $E = \sqrt{2x^2}$ δ) $E = 4x$

5. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α του διπλανού πίνακα με τον πίνακα τιμών της στήλης Β.

(Στη στήλη Β ένας πίνακας τιμών περισσεύει.)

ΣΤΗΛΗ Α
(α) $y = 2x + 1$
(β) $y = x^2 + 1$
(γ) $y = 1 - x$

ΣΤΗΛΗ Β

i)	x	–3	–1	0	1	2
	y	10	2	1	2	5
ii)	x	–3	–1	0	1	2
	y	–5	–1	1	3	5
iii)	x	–3	–1	0	1	2
	y	4	2	1	0	–1
iv)	x	–3	–1	0	1	2
	y	4	2	1	0	2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3x - 2$

x	–3	–2	–1	0	2
y					

β) $y = \frac{x-1}{2}$

x	–1	0	2	4	5
y					

2 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = x^2 + 1$

x	–3	–1	0	2	5
y					

β) $y = x^2 + 3x - 2$

x	–3	–2	0	1	3
y					

3 Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%. Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο.

4 Ένας πωλητής παίρνει μισθό 600 € τον μήνα και ποσοστό 7% επί του ποσού των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y, που κερδίζει τον μήνα, ως συνάρτηση του ποσού x των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

5 Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y (σε cm).
α) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x.
β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 100 cm², να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x.

6 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος x (σε cm). Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε και την περίμετρο Π του τετραγώνου ως συναρτήσεις του x. Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

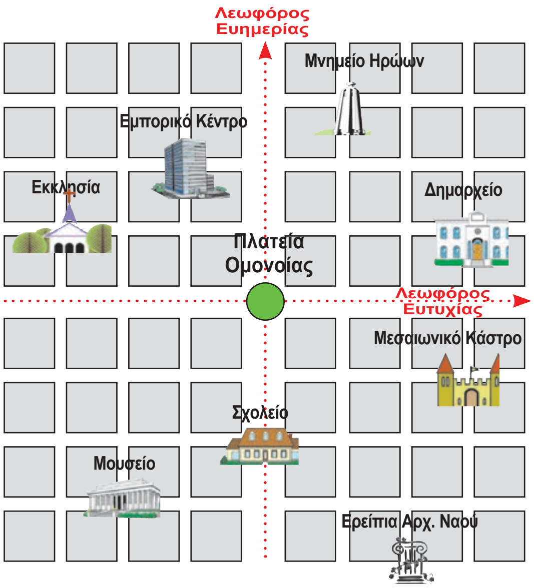
x	1	2	2,5	5	0,3
Ε					
Π					

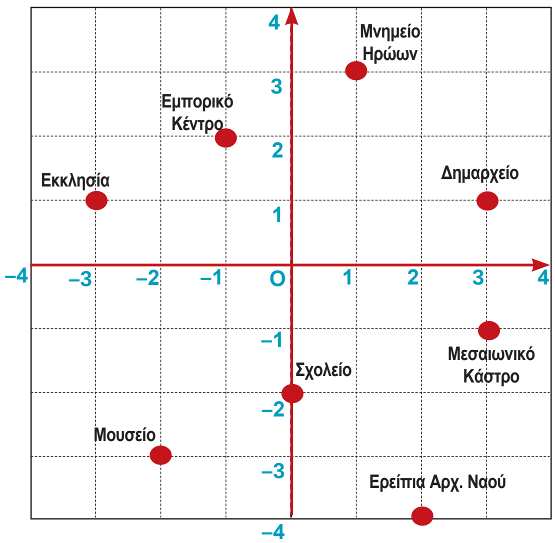
7 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 3x - 5$:

x	2		–3	
y		7		–2

8 Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 70 χιλιόμετρα την ώρα.
α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε 2 ώρες και πόση σε 5 ημέρες;
β) Να εκφράσετε την απόσταση S (σε χιλιόμετρα) που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες).

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης





ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα χάρτη μιας πόλης στον οποίο φαίνονται οι δύο κεντρικές οδικές αρτηρίες της πόλης και μερικά οικοδομικά τετράγωνα.

Έχουν, επίσης, σημειωθεί μερικά βασικά σημεία της πόλης, όπως η Ομόνοια (κεντρική πλατεία και σημείο διασταύρωσης των δύο βασικών λεωφόρων), το Δημαρχείο, το Εμπορικό Κέντρο, κ.τ.λ.

Για να επισκεφθούμε κάποιο από αυτά τα σημεία (π.χ. το Δημαρχείο), ξεκινώντας από την Ομόνοια πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα δεξιά πάνω στη Λεωφόρο Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω παράλληλα προς τη Λεωφόρο Ευημερίας.
Δηλαδή, η θέση του Δημαρχείου προσδιορίζεται επακριβώς από το ζεύγος των αριθμών (3, 1).

Ομοίως, η θέση της Εκκλησίας προσδιορίζεται από το ζεύγος των αριθμών (–3, 1). Δηλαδή για να πάμε στην εκκλησία ξεκινώντας από την Ομόνοια, πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα αριστερά στη Λεωφόρο Ευτυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω, παράλληλα προς την Λεωφόρο Ευημερίας.

Να χρησιμοποιήσετε το διπλανό διάγραμμα (που είναι ένας πιο απλός χάρτης της ίδιας πόλης), για να προσδιορίσετε τη θέση και των άλλων βασικών σημείων της πόλης που φαίνονται στον χάρτη.

Λύση

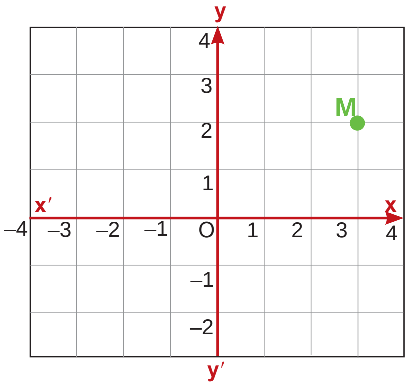
Ξεκινώντας από την Ομόνοια (Ο) έχουμε:

- Μνημείο Ηρώων: 1 τετράγωνο δεξιά και 3 πάνω, άρα (1, 3).
- Εμπορικό Κέντρο: 1 τετράγωνο αριστερά και 2 πάνω, άρα (–1, 2).
- Μουσείο: 2 τετράγωνα αριστερά και 3 κάτω, άρα (–2, –3).
- Σχολείο: 0 τετράγωνα αριστερά (ή δεξιά) και 2 κάτω, άρα (0, –2).
- Ερείπια Αρχ. Ναού: 2 τετράγωνα δεξιά και 4 κάτω, άρα (2, –4).
- Μεσαιωνικό Κάστρο: 3 τετράγωνα δεξιά και 1 κάτω, άρα (3, –1).

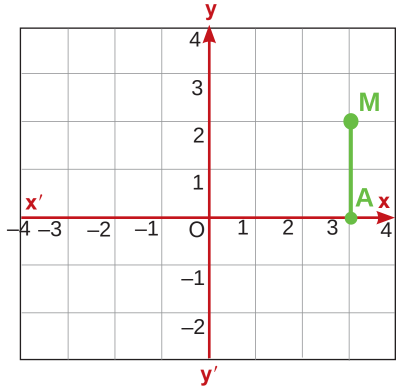
Σύστημα συντεταγμένων

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου της πόλης χρησιμοποιώντας δύο βασικούς οδικούς άξονες: τις Λεωφόρους Ευτυχίας και Ευημερίας.

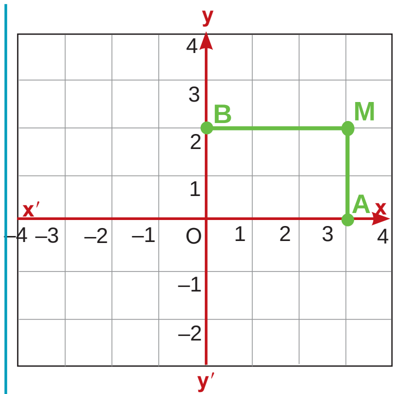
Την ιδέα αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε γενικότερα για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, ως εξής:



1. *Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y, με κοινή αρχή O και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο M.*



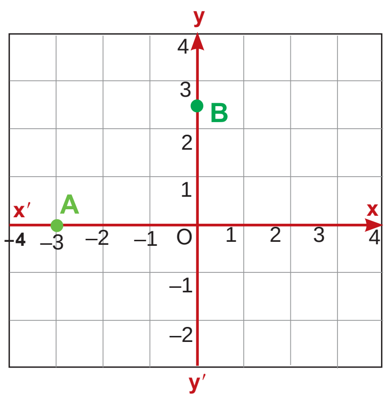
2. *Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y΄y που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A. Για το σχήμα μας το A αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα x΄x.*



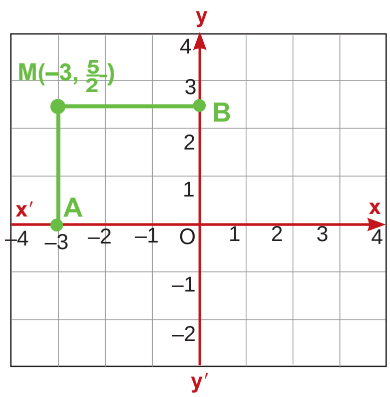
3. *Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x΄x που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B. Για το σχήμα μας το B αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα y΄y.*

Δηλαδή, το σημείο M αντιστοιχεί στο ζεύγος των αριθμών (3, 2) και συμβολίζεται M(3, 2).
Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **τετμημένη** του σημείου M και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη** του σημείου M.
Η τετμημένη και η τεταγμένη του M λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου M.

Αλλά και αντιστρόφως, αν έχουμε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο και ένα ζεύγος αριθμών π.χ. το $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$, μπορούμε να βρούμε ένα μόνο σημείο M του επιπέδου που αντιστοιχεί στο ζεύγος αυτό ως εξής:



1. *Σημειώνουμε με A το σημείο του άξονα x΄x που αντιστοιχεί στον αριθμό –3 και με B το σημείο του άξονα y΄y που αντιστοιχεί στον αριθμό $\frac{5}{2}$.*



2. *Από τα σημεία A και B φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο M, που είναι το ζητούμενο με συντεταγμένες $M\left(-3, \frac{5}{2}\right)$.*

Άρα:

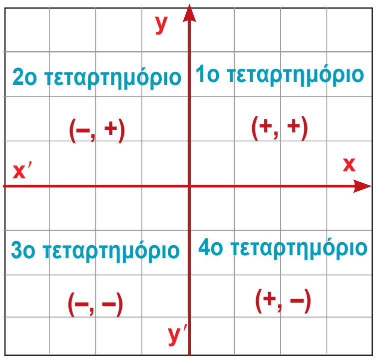
Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι άξονες x′x και y′y αποτελούν ένα **σύστημα ορθογωνίων αξόνων** ή απλώς **σύστημα αξόνων.**

Παρατηρήσεις:

α) *Στα παραπάνω σχήματα χρησιμοποιήσαμε κάθετους άξονες των οποίων οι μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο μήκος. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται* ***ορθοκανονικό σύστημα αξόνων****. Όπως θα δούμε όμως παρακάτω, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες επιβάλλεται να χρησιμοποιήσουμε συστήματα αξόνων με διαφορετικού μήκους μονάδες μέτρησης στους άξονες x′x και y′y. Φυσικά, ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι ορθοκανονικό.*
Στα επόμενα σχήματα -εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά- λέγοντας σύστημα αξόνων θα εννοούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) *Το σύστημα των αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που λέγονται* ***τεταρτημόρια****. Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.*



Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{1}{2}x^2$.

α) *Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:*

x	–4	–2	0	2	4
y					

β) *Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα.*

γ) *Να ενώσετε με γραμμές τα σημεία αυτά. Τι γραμμή σχηματίζεται;*

δ) *Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα (α), (β) και (γ) για την ίδια συνάρτηση* $y = \frac{1}{2}x^2$ *χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα τιμών. Τι παρατηρείτε;*

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y									

ε) *Τι γραμμή θα σχηματιστεί, αν χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη τιμών;*

Λύση

α) Για x = –4 είναι $y = \frac{1}{2}(-4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$

Για x = –2 είναι $y = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$

Για x = 0 είναι $y = \frac{1}{2}(0)^2 = 0.$

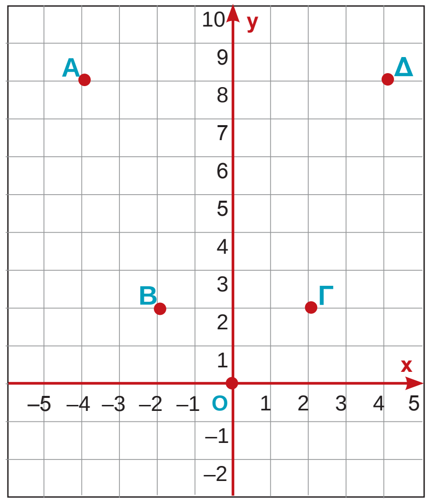
Για x = 2 είναι $y = \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$

Για x = 4 είναι $y = \frac{1}{2}(4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$

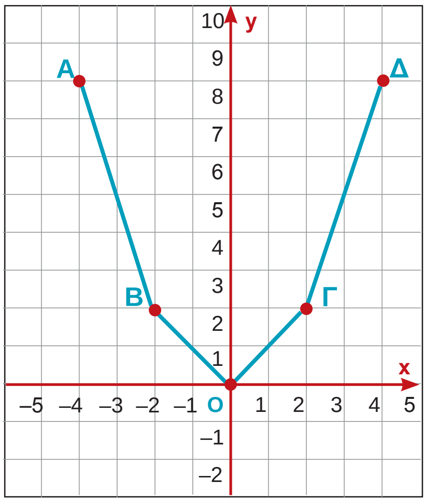
Επομένως, ο πίνακας τιμών είναι:

x	–4	–2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

β) Τα ζεύγη (x, y) που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα είναι: (–4, 8), (–2, 2), (0, 0), (2, 2) και (4, 8) που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος.



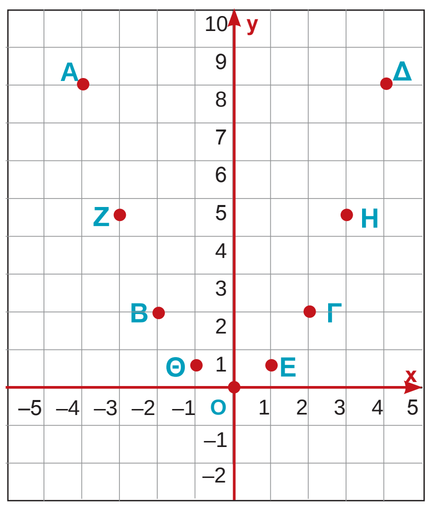
γ) Ενώνοντας με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή.

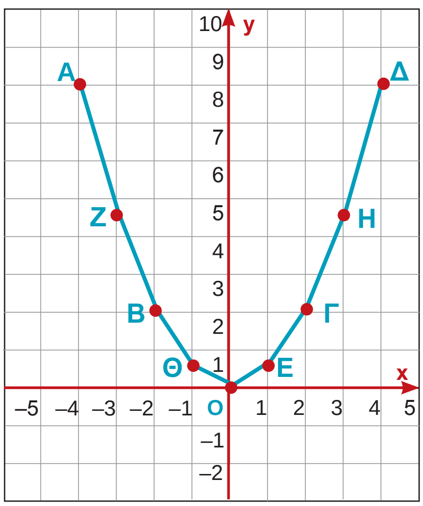


δ) Ομοίως έχουμε:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Τα σημεία τώρα είναι περισσότερα και η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται μοιάζει με καμπύλη.

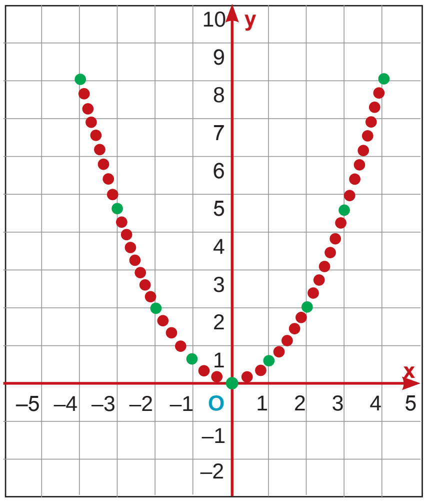


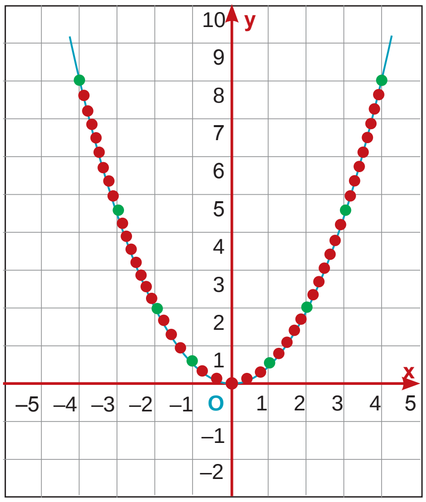


ε) Ας χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη. Για παράδειγμα:

x	–4	–3,9	–3,8	–3,7	–3,6	...	0	...	3,6	3,7	3,8	3,9	4
y	8	7,605	7,22	6,845	6,48				6,48	6,845	7,22	7,605	8

Όπως παρατηρούμε στα παρακάτω σχήματα, η γραμμή που θα σχηματιστεί θα είναι καμπύλη.





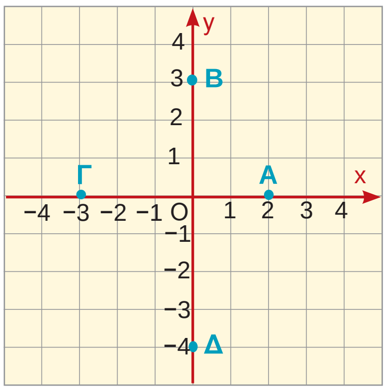
Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει μια «εποπτική» εικόνα της συνάρτησης αυτής και μας βοηθάει να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών x και y.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος. Τι συμπεραίνετε;

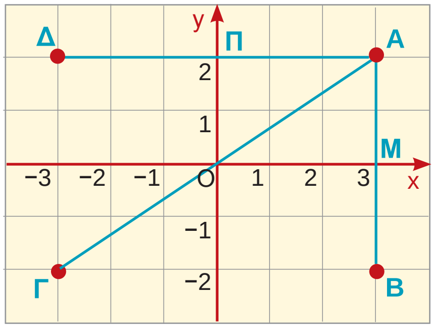
Λύση: Παρατηρούμε ότι από τα σημεία Α και Γ οι κάθετες προς τον άξονα y′y αντιστοιχούν στο σημείο Ο, οπότε αυτά τα σημεία έχουν τεταγμένες 0.
Άρα είναι Α(2, 0), Γ(–3, 0).
Ομοίως, από τα σημεία Β και Δ οι κάθετες προς τον άξονα x′x αντιστοιχούν στο σημείο Ο, οπότε τα σημεία αυτά έχουν τετμημένη 0. Άρα είναι Β(0, 3) και Δ(0, –4).
Δηλαδή:
Κάθε σημείο του άξονα x′x έχει τεταγμένη 0 και κάθε σημείο του άξονα y′y έχει τετμημένη 0.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται το σημείο Α(3, 2). Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς:
α) τον άξονα x′x β) τον άξονα y′y γ) την αρχή Ο των αξόνων.
Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών;

Λύση: Από το Α φέρνουμε κάθετες ΑΜ και ΑΠ στους άξονες x′x και y′y.



α) Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΒ = ΜΑ. Το σημείο Β είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα x′x και έχει συντεταγμένες (3, –2).

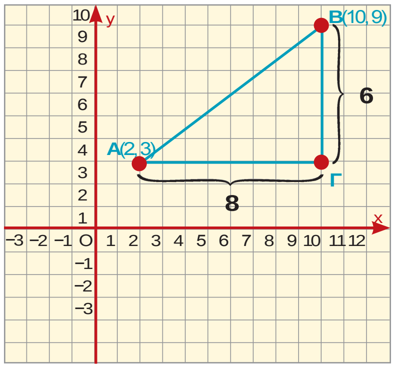
β) Προεκτείνουμε την ΑΠ κατά τμήμα ΠΔ = ΠΑ. Το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y′y και έχει συντεταγμένες (–3, 2).

γ) Ενώνουμε το Α με την αρχή Ο των αξόνων και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΓ = ΟΑ. Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή Ο και έχει συντεταγμένες (–3, –2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνονται τα σημεία Α(2, 3) και Β(10, 9). Να υπολογίσετε την απόστασή τους ΑΒ. Τι συμπεραίνετε;

Λύση: Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (10, 3), οπότε ΑΓ = 10 – 2 = 8 και ΒΓ = 9 – 3 = 6.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$AB^2 = AΓ^2 + BΓ^2$ ή

$AB^2 = 8^2 + 6^2$ ή

$AB^2 = 100$ ή

$AB = 10$

Γενικότερα:

Αν δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, η απόσταση τους υπολογίζεται από τον τύπο: $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Έχει διαπιστωθεί ότι το νερό της θάλασσας δεν έχει παντού την ίδια θερμοκρασία. Όσο πιο βαθιά κατεβαίνουμε, τόσο πιο κρύο γίνεται το νερό. Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη στο βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα:

x	0	50	100	200	400
Τ	28	20	17	12	9

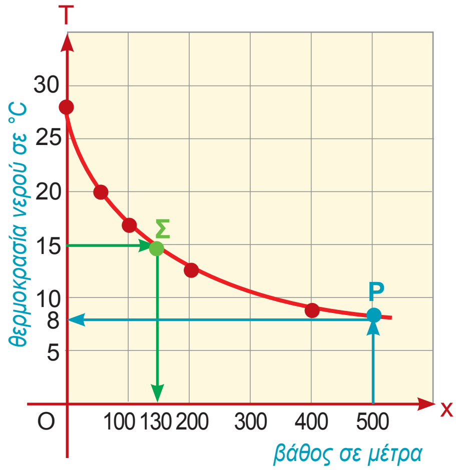
όπου Τ είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) η οποία μεταβάλλεται ως συνάρτηση του βάθους x (σε μέτρα).

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων.

γ) Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι 15°C;

Λύση: α) Σ' ένα σύστημα αξόνων τοποθετούμε τα σημεία με συντεταγμένες (0, 28), (50, 20), (100, 17), (200, 12) και (400, 9).
Χρησιμοποιούμε ένα μη ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στον άξονα x′x η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε 100 μέτρα, ενώ στον άξονα y′y η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 5°C. Στη συνέχεια, ενώνουμε με μία καμπύλη τα σημεία αυτά.



β) Για να βρούμε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων, από το σημείο με τετμημένη 500 του άξονα x′x φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα y′y, που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Ρ. Στη συνέχεια, από το Ρ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x′x, που τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη (περίπου) 8. Άρα, η θερμοκρασία σε βάθος x = 500 m είναι (περίπου) Τ = 8°C.

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι 15°C, φέρνουμε από το σημείο με τεταγμένη 15 του άξονα y′y παράλληλη προς τον άξονα x′x που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Σ. Στη συνέχεια, από το Σ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y′y, που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο με τετμημένη (περίπου) 130 m. Άρα, η θερμοκρασία είναι 15°C σε βάθος (περίπου) x = 130 m.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

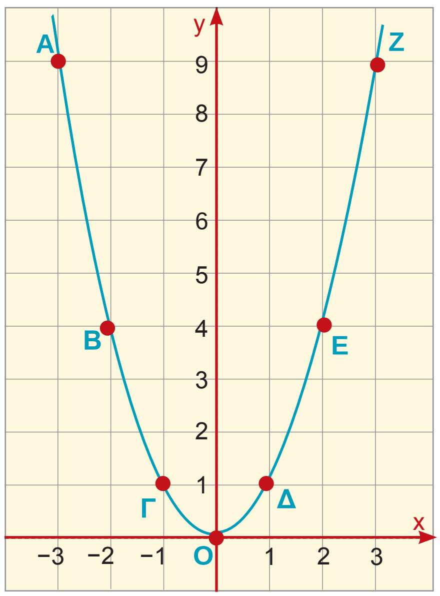
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

Λύση: Σχηματίζουμε, καταρχάς, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Στη συνέχεια, τοποθετούμε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) του παραπάνω πίνακα. Έτσι, βρίσκουμε τα σημεία Α(–3, 9), Β(–2, 4), Γ(–1, 1), Ο(0, 0), Δ(1, 1), Ε(2, 4) και Ζ(3, 9).

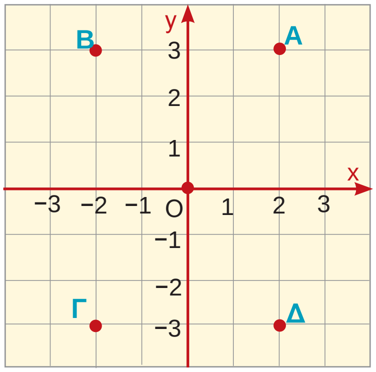
Στη συνέχεια, ενώνουμε με τη σειρά τα σημεία αυτά. Η καμπύλη που προκύπτει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

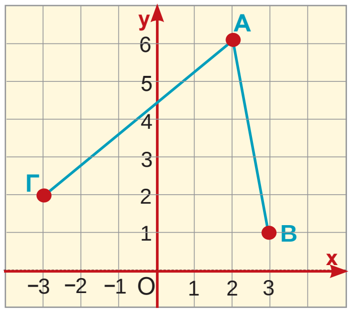
1. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σημείο τις συντεταγμένες του:

Σημείο	Συντεταγμένες
Α	(2, 3)
	(3, 2)
Β	(–2, 3)
	(–3, 2)
Γ	(–2, –3)
	(–3, –2)
Δ	(2, –3)
	(3, –2)



2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της 1ης γραμμής.

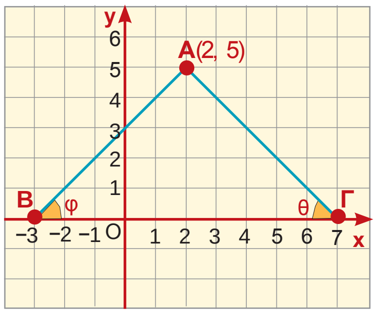
Σημείο Α	Συμμετρικό του Α ως προς τον x′x	Συμμετρικό του Α ως προς τον y′y	Συμμετρικό του Α ως προς το Ο
(–2, 3)	(–2, –3)	(2, 3)	(2, –3)
(3, 5)			
(–3, 5)			
(–3, –5)			
(3, –5)			



3. Στο διπλανό σχήμα είναι:

α) ΑΒ < ΑΓ, β) ΑΒ > ΑΓ, γ) ΑΒ = ΑΓ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



4. Στο διπλανό σχήμα:

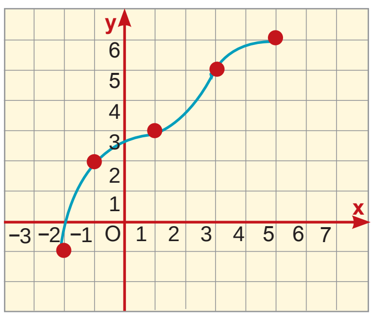
α) Α: $\hat{A} < 90°$ Β: $\hat{A} = 90°$ Γ: $\hat{A} > 90°$

β) Α: εφθ=5 Β: εφθ= $\frac{7}{5}$ Γ: εφθ= $\frac{5}{7}$ Δ: εφθ=1

γ) Α: ΑΒ < ΑΓ Β: ΑΒ = ΑΓ Γ: ΑΒ > ΑΓ

δ) Α: εφφ=3 Β: εφφ = 5 Γ: εφφ=1 Δ: εφφ=2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



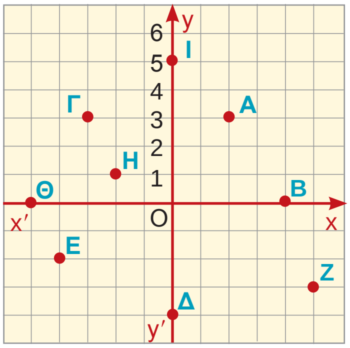
5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

α) για x=1, είναι y = ... Α: –1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5
β) για x=3, είναι y = ... Α: –1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5
γ) για y=6, είναι x = ... Α: –1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5
δ) για y=2, είναι x = ... Α: –1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

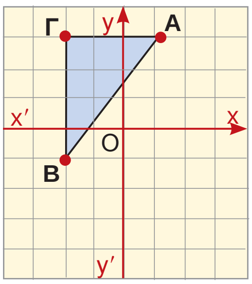
1 Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ και Ι.



2 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα σύστημα αξόνων και να σημειώσετε τα σημεία: Α(–3, 2), Β(–0,25, 1), Γ$(0, -\frac{5}{2})$, Δ$(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$, Ε$(-\sqrt{2}, 0)$, Ζ(2,4, –3,2).

3 Δίνονται τα σημεία Α(–3, 4) και Β$(2, -\frac{7}{2})$.
Σε τετραγωνισμένο χαρτί να βρείτε τις συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων ως προς τον άξονα x′x, τον άξονα y′y και την αρχή Ο των αξόνων.

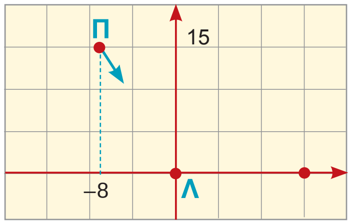
4 α) Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.
β) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
i) Το μήκος ΒΓ ισούται με:
Α: 1 + 3 = 4 Β: 2 – 2 = 0
Γ: 3 – 1 = 2 Δ: –1 – 3 = –4
ii) Το μήκος ΑΓ ισούται με:
Α: 3 – 3 = 0 Β: 1 + 2 = 3
Γ: 1 – 2 = –1 Δ: 2 – 1 = 1
γ) Αφού παρατηρήσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, να επαληθεύσετε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με 5.



5 Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες x′x και y′y.
α) Α(3, 5) β) Β(–3, 2) γ) Γ(0, –4)

6 Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:
α) Α(3, 5) και Β(5, 1) β) Α(–2, 1) και Β(2, –3)
γ) Α(3,–5) και Β(–2,–5) δ) Α(–5,–7) και Β(–5, 2)

7 Ένα πλοίο Π κινείται με ταχύτητα 8 μίλια την ώρα και κατευθύνεται προς το λιμάνι Λ.



Η θέση του πλοίου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Λ και μονάδα μέτρησης το 1 μίλι, είναι (–8, 15). Σε πόση ώρα θα φτάσει στο λιμάνι;

8 Η πίεση P (σε cm Hg) του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h από το έδαφος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Πίεση P σε cm Hg	76	68	60	52

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
β) Ποια είναι η πίεση σε ύψος 1,5 km από το έδαφος;
γ) Σε ποιο ύψος η πίεση είναι περίπου ίση με 70 cm Hg;

9 Η θερμοκρασία Τ του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Θερμοκρασία Τ σε °C	22	16	10	4

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
β) Πόση περίπου είναι η θερμοκρασία του αέρα σε ύψος 500 μέτρων;
γ) Σε ποιο ύψος η θερμοκρασία του αέρα είναι περίπου 12°C;

10 Όταν ένα σώμα (π.χ. μια μπάλα) πέφτει από ένα ψηλό σημείο (π.χ. από τον τελευταίο όροφο ενός ουρανοξύστη ύψους 100 m) δεν κινείται ομαλά (με σταθερή ταχύτητα), αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η απόσταση x που διανύει το σώμα ως συνάρτηση του χρόνου t.

t(s)	0	1	2	3	4
x(m)	0	5	20	45	80

Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

3.3. Η συνάρτηση y = αx

Ποσά ανάλογα - Η συνάρτηση y = αx

Στην εφημερίδα διαβάζουμε διάφορες φράσεις, όπως:
«... η τιμή της βενζίνης μειώθηκε ανάλογα με τη μείωση του πετρελαίου...». Οι φράσεις αυτές παρουσιάζουν ένα ποσό να μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο άλλο.

Όπως γνωρίζουμε, δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται τέσσερα τετράγωνα με πλευρές (σε cm) 0,5, 1, 1,5 και 2.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

πλευρά x	0,5	1	1,5	2
περίμετρος y				
λόγος $\frac{y}{x}$				

β) Να εκφράσετε την περίμετρο y ενός τετραγώνου ως συνάρτηση του μήκους x της πλευράς του.

Λύση

α) Για x = 0,5 η περίμετρος είναι y = 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2. Ομοίως, βρίσκουμε την περίμετρο και στις άλλες περιπτώσεις, που είναι αντίστοιχα: 4, 6 και 8.

Επίσης, για τον λόγο $\frac{y}{x}$ έχουμε:

$\frac{2}{0,5} = 4$, $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{6}{1,5} = 4$ και $\frac{8}{2} = 4$

πλευρά x	0,5	1	1,5	2
περίμετρος y	2	4	6	8
λόγος $\frac{y}{x}$	4	4	4	4

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός πάντοτε και ίσος με 4.

Άρα $\frac{y}{x} = 4$ ή $y = 4x$. Η σχέση αυτή εκφράζει το y ως συνάρτηση του x.

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε και αρνητικές τιμές της μεταβλητής x στη συνάρτηση y = αx.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Αφού συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών, ο οποίος περιλαμβάνει και αρνητικές τιμές του x, να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{2}x$. *Τι παρατηρείτε;*

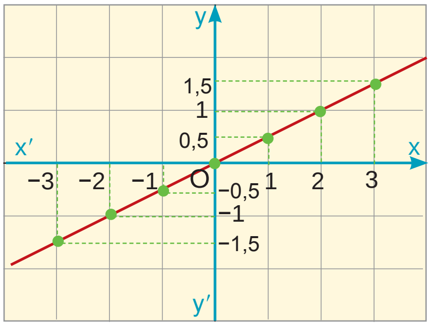
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

Λύση

Για x = –3 είναι $y = \frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} = -1{,}5$.

Ομοίως, βρίσκουμε τις υπόλοιπες τιμές και συμπληρώνουμε τον πίνακα.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5



Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των τιμών του πίνακα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή O.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

Όταν αναφερόμαστε στην ευθεία, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx, τότε λέμε: η ευθεία με εξίσωση y = αx ή απλώς η ευθεία y = αx. O άξονας x′x είναι η ευθεία με εξίσωση y = 0x, δηλαδή y = 0.

Η κλίση της ευθείας y = αx

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία y = αx ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με α, δηλαδή:

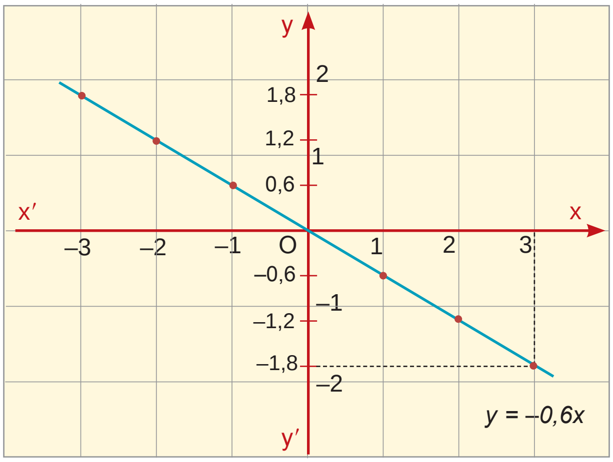
$\frac{y}{x} = α$, για $x \neq 0$. O λόγος αυτός λέγεται **κλίση της ευθείας y = αx.**

Για παράδειγμα, η ευθεία y = –2x έχει κλίση –2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την ευθεία με εξίσωση $y = -0{,}6x$.

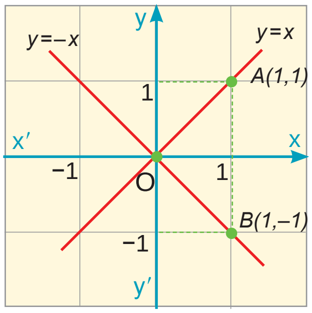
Λύση: Η συνάρτηση $y = -0{,}6x$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Επομένως, πρέπει να βρούμε ένα ακόμα σημείο της.
Για $x = 3$ είναι $y = -0{,}6 \cdot 3 = -1{,}8$. Άρα, η ευθεία περνάει από το σημείο Α(3, –1,8). Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $y = x$ και $y = -x$.

Λύση: Η συνάρτηση $y = x$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο. Ένα δεύτερο σημείο της προσδιορίζεται δίνοντας μια τυχαία τιμή στο x εκτός της μηδενικής. Για $x = 1$ είναι $y = 1$, άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(1, 1). Η ζητούμενη ευθεία είναι η ΟΑ. Ομοίως, βρίσκουμε ότι η γραφική παράσταση της $y = -x$ είναι η ΟΒ.
Παρατήρηση: *Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων και η $y = -x$ είναι διχοτόμος της 2ης και της 4ης γωνίας.*



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(–2, 1).

Λύση: Το σημείο Α έχει συντεταγμένες $x = -2$, $y = 1$, οπότε η κλίση της ευθείας είναι

$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = -\frac{1}{2}x$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένα πολυκατάστημα κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη.

α) Πόση έκπτωση αναλογεί σ' ένα ζευγάρι παπούτσια το οποίο κοστίζει αρχικά 100 €; Ποια είναι η τιμή που θα το αγοράσουμε μετά την έκπτωση;

β) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα, με τις τιμές διαφόρων ειδών του καταστήματος και να εξετάσετε αν είναι ανάλογα τα ποσά x, y και τα ποσά x, ω.

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20				
Τελική τιμή ω	80				

γ) Να εκφράσετε τα ποσά y και ω ως συναρτήσεις του x.

Λύση: α) Η έκπτωση που αναλογεί είναι $100 \cdot \frac{20}{100} = 20$ €, οπότε θα το αγοράσουμε $100 - 20 = 80$ €.

β) Ομοίως, με το ερώτημα (α) συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Αρχική τιμή x	100	200	50	80	150
Έκπτωση y	20	40	10	16	30
Τελική τιμή ω	80	160	40	64	120

γ) Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, γιατί: $\frac{y}{x} = \frac{20}{100} = \frac{40}{200} = \frac{10}{50} = \frac{16}{80} = \frac{30}{150} = 0{,}2$.
Επομένως, $y = 0{,}2x$.

Τα ποσά x και ω είναι ανάλογα, γιατί: $\frac{\omega}{x} = \frac{80}{100} = \frac{160}{200} = \frac{40}{50} = \frac{64}{80} = \frac{120}{150} = 0{,}8$.
Επομένως, $\omega = 0{,}8x$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα.

α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών.

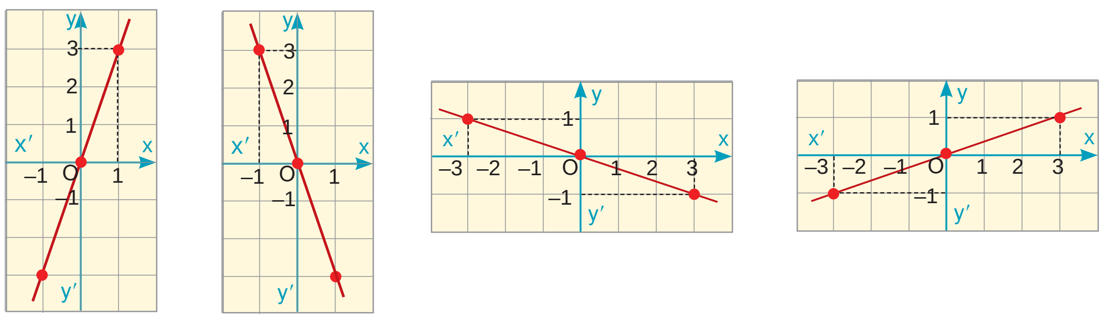
x	2	4	
y	5		15

β) Ποιος από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το y ως συνάρτηση του x;

Α: $y = 5x$, Β: $y = \frac{2}{5}x$, Γ: $y = \frac{5}{2}x$, Δ: $y = 0{,}4x$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2. Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι η $y = 3x$;



3. Ποια από τις παρακάτω ευθείες έχει κλίση $-\frac{1}{3}$;

α) $y = 3x$ β) $y = -3x$ γ) $y = \frac{1}{3}x$ δ) $y = -\frac{1}{3}x$ ε) $y = x - \frac{1}{3}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Γνωρίζοντας ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	1	2	5		
y		6		21	30

β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:
$y = 2x$, $y = 3x$ και $y = 5x$.

3 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:
$y = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{1}{2}x$.

4 Ένα κινητό κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ = 5$ m/s. Να εκφράσετε το διάστημα S που διανύει ως συνάρτηση του χρόνου t. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

5 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(2, 6).

6 Να σχεδιάσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων μια ευθεία η οποία να διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και να έχει κλίση $\frac{3}{2}$.

7 Να βρείτε την κλίση μιας ευθείας η οποία να διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και από το σημείο Α(–1, 3).

8 Οι τιμές των αγροτικών προϊόντων σε μια χώρα αυξήθηκαν κατά 20% σ' έναν χρόνο.

α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των αγροτικών προϊόντων, ως συνάρτηση των παλιών τους τιμών x.

β) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση.

γ) Με τη βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης να βρείτε:

i) Τη σημερινή τιμή ενός προϊόντος που είχε πέρυσι 7 €.

ii) Την περσινή τιμή ενός προϊόντος που έχει τώρα 7 €.

9 Η ισοτιμία του Ευρώ έναντι του Δολλαρίου την 21/7/03 ήταν 112 $ για 100 €.

α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει την τιμή y σε δολλάρια ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής x του προϊόντος αυτού σε Ευρώ.

β) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε δολλάρια ενός αεροπορικού εισιτηρίου που κοστίζει 250 €.

γ) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε Ευρώ ενός αεροπορικού εισιτηρίου κόστους 250 $.

3.4. Η συνάρτηση y = αx + β

Η ευθεία με εξίσωση y = αx + β

Στις προηγούμενες παραγράφους μάθαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx$ είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx + β$. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Το κινητό της Κατερίνας.

Η Κατερίνα έχει κινητό τηλέφωνο με χρέωση 0,9 € για κάθε λεπτό ομιλίας.

α) Αν ονομάσουμε x το χρόνο ομιλίας (σε λεπτά) και y το ποσό πληρωμής (σε €) που αντιστοιχεί, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής y	0,9				

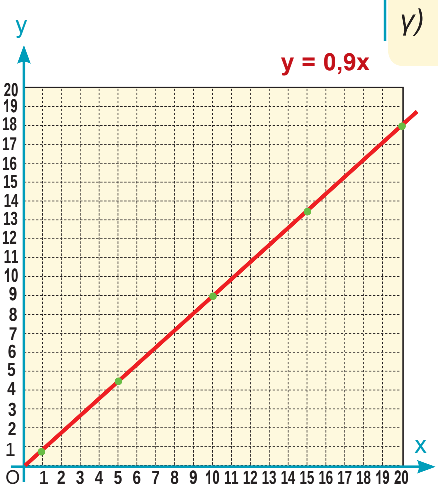
Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Η τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει και 10 € πάγιο τον μήνα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με το νέο ποσό πληρωμής y με την προσθήκη και των 10 €.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας					
Πάγιο					
Συνολικό ποσό πληρωμής y					

Να εκφράσετε το νέο ποσό πληρωμής y ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας x και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

γ) Τι σχέση έχουν οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις;

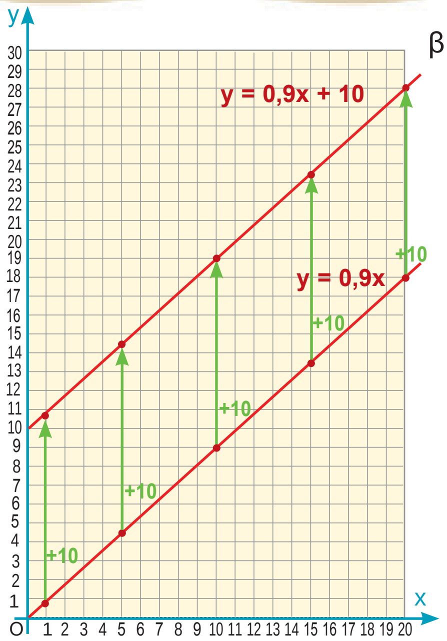


Λύση

α) Για $x = 5$ είναι $y = 0{,}9 \cdot 5 = 4{,}5$ €.
Ομοίως, βρίσκουμε τα υπόλοιπα ζεύγη του πίνακα.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής y	0,9	4,5	9	13,5	18

Παρατηρούμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, γιατί $\frac{y}{x} = 0{,}9$ ή $\mathbf{y = 0{,}9x}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι μια ημιευθεία που αρχίζει από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 0,9, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

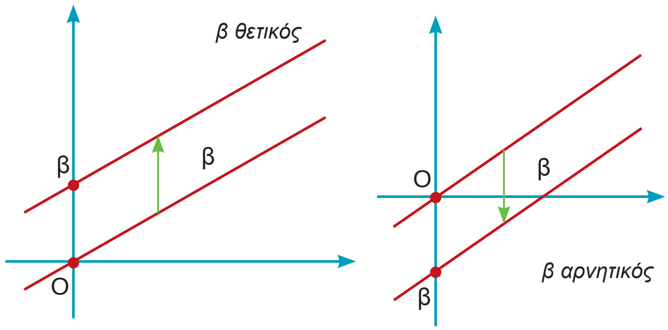


β) Εύκολα συμπληρώνουμε τον πίνακα προσθέτοντας στο ποσό πληρωμής και το πάγιο των 10 €.

Χρόνος ομιλίας x	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας	0,9	4,5	9	13,5	18
Πάγιο	+10	+10	+10	+10	+10
Συνολικό ποσό πληρωμής y	10,9	14,5	19	23,5	28

Η νέα συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό ποσό πληρωμής είναι **y = 0,9x + 10**.
Τοποθετούμε στο σύστημα αξόνων τα νέα ζεύγη (x, y) του παραπάνω πίνακα των οποίων η τεταγμένη είναι αυξημένη κατά 10 μονάδες. Αν ενώσουμε τα νέα αυτά σημεία, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = 0,9x + 10 είναι ημιευθεία παράλληλη προς την ημιευθεία y = 0,9x, μετατοπισμένη κατά 10 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα y′y.

Η γραφική παράσταση της y = αx + β, β≠0 είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση y = αx, που διέρχεται από το σημείο (0, β) του άξονα y′y.



Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx + β, θα λέμε: η ευθεία με εξίσωση y = αx + β ή απλώς η ευθεία y = αx + β.
Ο αριθμός **α**, που, όπως γνωρίζουμε, λέγεται κλίση της ευθείας y = αx, λέγεται και **κλίση της ευθείας y = αx + β**.

Η εξίσωση της μορφής αx + βy = γ

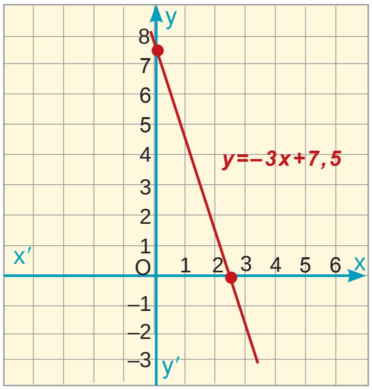
Παρατηρήσαμε ότι οι συναρτήσεις y = αx και y = αx + β παριστάνουν ευθείες. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες εξισώσεις που παριστάνουν ευθείες, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

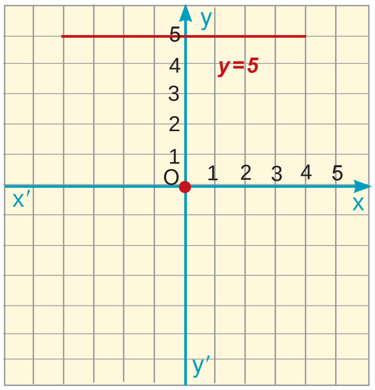
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

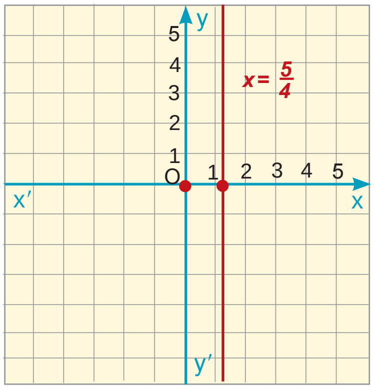
Η κυρία Μαρίκα σκοπεύει να ξοδέψει 15 € για να αγοράσει κρέας που κοστίζει 6 € το κιλό και πατάτες, που κοστίζουν 2 € το κιλό. Ποια σχέση συνδέει τα κιλά κρέας και τα κιλά πατάτες που τελικά θα αγοράσει;

Λύση

Έστω ότι θα αγοράσει x κιλά κρέας και y κιλά πατάτες. Θα ξοδέψει λοιπόν 6x € για το κρέας και 2y € για πατάτες. Εφόσον διαθέτει μόνο 15 €, πρέπει 6x + 2y = 15. Αν λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς y, έχουμε:







$6x + 2y = 15$ ή

$2y = -6x + 15$ ή ← *Πήγαμε το 6x στο άλλο μέλος*

$y = -3x + \frac{15}{2}$ ← *Διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με 2*

που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία.

Γενικά:

Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

Για παράδειγμα:

- Η εξίσωση $12x + 3y = 15$ γράφεται $3y = -12x + 15$ ή $y = -4x + 5$ και παριστάνει ευθεία με κλίση $\alpha = -4$.

- Η εξίσωση $0x + 3y = 15$ γράφεται $y = 5$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x′x.
Γενικότερα, η εξίσωση $y = \kappa$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x′x.
Η ευθεία $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x′x.

- Η εξίσωση $12x + 0y = 15$ γράφεται $x = \frac{15}{12}$ ή $x = \frac{5}{4}$
και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y′y.
Γενικότερα, η εξίσωση $x = \kappa$, παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y′y.
Η ευθεία $x = 0$ παριστάνει τον άξονα y′y.

Σημεία τομής της ευθείας $\alpha x + \beta y = \gamma$ με τους άξονες

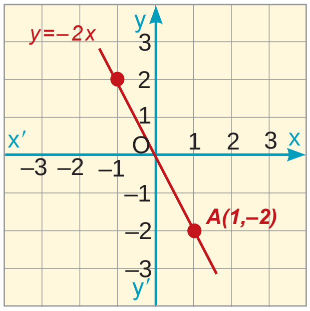
➤ Γνωρίζουμε ότι ο άξονας x′x έχει εξίσωση $y = 0$.
Επομένως, για να βρούμε το σημείο Α στο οποίο η ευθεία $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τέμνει τον άξονα x′x, θέτουμε $y = 0$ και υπολογίζουμε την τετμημένη του x.

➤ Γνωρίζουμε ότι ο άξονας y′y έχει εξίσωση $x = 0$. Επομένως, για να βρούμε το σημείο Β στο οποίο η ευθεία $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τέμνει τον άξονα y′y, θέτουμε $x = 0$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη του y.

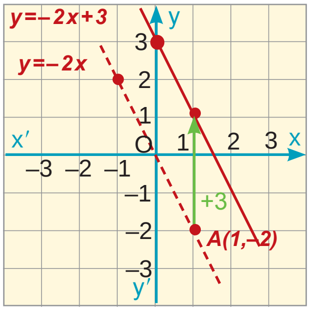
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -2x$, $y = -2x + 3$ και $y = -2x - 3$, όπου x ο πραγματικός αριθμός.

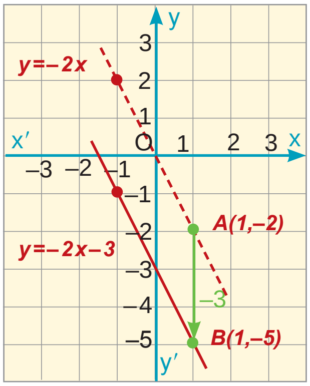
Λύση: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **y = –2x** είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της.
Για x = 1 είναι y = –2 · 1 = –2.
Άρα, διέρχεται και από το σημείο Α με συντεταγμένες (1,–2).
Ενώνουμε το Ο με το Α και προεκτείνουμε.
Η γραφική παράσταση της y = –2x φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **y = –2x + 3** είναι ευθεία παράλληλη με την y = –2x και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, 3). Μεταφέρουμε το σημείο (0, 0) στο σημείο (0, 3) και το σημείο (1, –2) στο (1, 1). Ενώνουμε τα νέα αυτά σημεία και προεκτείνουμε.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = –2x + 3 φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης **y = –2x – 3** είναι ευθεία παράλληλη με την y = –2x και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0, –3). Μεταφέρουμε το σημείο (0, 0) στο σημείο (0, –3) και το σημείο (1, –2) στο (1, –5). Ενώνουμε τα σημεία αυτά και προεκτείνουμε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται η εξίσωση 3x – 4y = 12, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί.
α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες.
β) Να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων.
γ) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να βρείτε την κλίση της ευθείας.

Λύση: α) **Για τον άξονα y′y:**
θέτουμε x = 0 στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

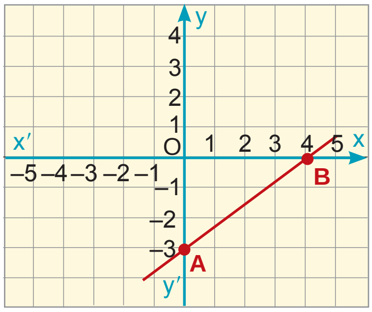
$$3 \cdot 0 - 4y = 12 \quad ή \quad -4y = 12 \quad ή \quad y = \frac{12}{-4} = -3.$$

Άρα, τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Α με συντεταγμένες (0, –3).
Για τον άξονα x′x:
θέτουμε y = 0 στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$$3 \cdot x - 4 \cdot 0 = 12 \quad ή \quad 3x = 12 \quad ή \quad x = \frac{12}{3} = 4.$$

Άρα, τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Β με συντεταγμένες (4, 0).

β) Ενώνουμε τα παραπάνω σημεία Α και Β και προεκτείνουμε.
Η γραφική παράσταση της ευθείας $3x - 4y = 12$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

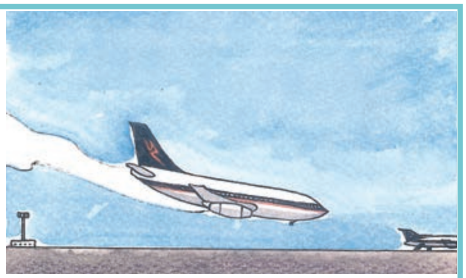


γ) Για να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x, λύνουμε ως προς y τη σχέση $3x - 4y = 12$, δηλαδή:

$-4y = -3x + 12$ ή $y = \frac{-3}{-4}x + \frac{12}{-4}$ ή

$y = \frac{3}{4}x - 3$. Η κλίση της ευθείας αυτής είναι $\frac{3}{4}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3



Η προσγείωση ενός αεροπλάνου

Η ταχύτητα (σε m/s) ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται, από τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος μέχρι να σταματήσει, δίνεται από τη σχέση: $υ = 45 - 1,5\,t$, όπου t ο χρόνος που πέρασε από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο άγγιξε το έδαφος.

α) Να βρείτε την ταχύτητά του τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος.

β) Να βρείτε τον χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο και να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητά του υ ως συνάρτηση του χρόνου t.

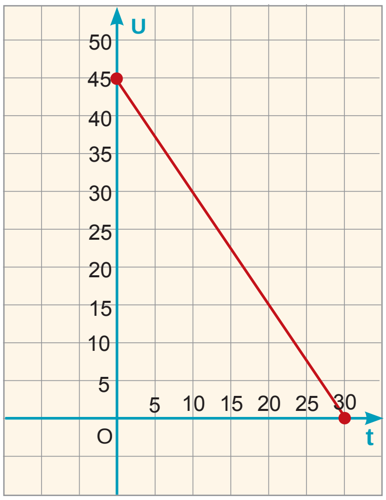
Λύση: α) Για $t = 0$ η ισότητα $υ = 45 - 1,5\,t$ δίνει $υ = 45$ m/s.

β) Τη στιγμή που σταματάει, το αεροπλάνο έχει ταχύτητα 0 m/s. Για την τιμή αυτή του υ, η ισότητα $υ = 45 - 1,5\,t$ γίνεται:

$0 = 45 - 1,5\,t$ ή $1,5\,t = 45$ ή $t = \frac{45}{1,5}$ ή

$t = 30$ (s).

Άρα, οι δυνατές τιμές του χρόνου t είναι $0 \leq t \leq 30$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $υ = 45 - 1,5\,t$ είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0, 45) και (30, 0).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

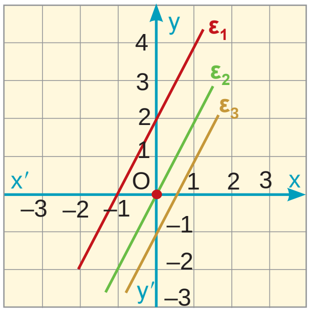
1. Η ευθεία $y = 3x$ είναι παράλληλη προς την:

Α:	$y = x + 3$	Β:	$y = x - 3$
Γ:	$y = 3x - 7$	Δ:	$y = -3x + 5$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

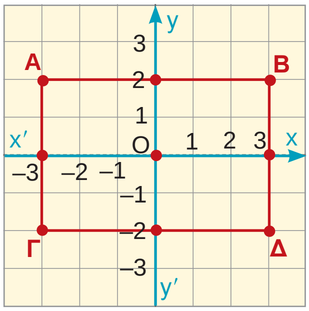
2. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις τρεις παράλληλες ευθείες της στήλης Β.
Να αντιστοιχίσετε καθεμιά με την εξίσωσή της.

Στήλη Α	Στήλη Β
$ε_1$	$y = 2x$
$ε_2$	$y = 2x - 1$
$ε_3$	$y = 2x + 2$



3. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει κέντρο το Ο και οι πλευρές του είναι παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
Να αντιστοιχίσετε κάθε πλευρά με την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει.

Πλευρές	Ευθείες
ΑΒ	$y = 2$
ΑΓ	$x = 3$
ΓΔ	$y = -2$
ΒΔ	$x = -3$



4. Η ευθεία με εξίσωση $4x + y = 4$

		Α	Β	Γ	Δ	Ε
α)	έχει κλίση:	4	–4	1	–1	$\frac{1}{4}$
β)	τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο:	(4, 1)	(4, 0)	(–4,0)	(1, 0)	(0, 4)
γ)	τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο:	(0, 1)	(0, 4)	(4, 4)	(0,–4)	(0,–1)

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5. Μια ευθεία ε τέμνει τους άξονες στα σημεία (3, 0) και (0, 4). Η εξίσωσή της είναι:

Α:	$3x + 4y = 9$	Β:	$3x + 4y = 16$	Γ:	$4x + 3y = 12$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

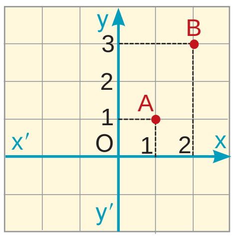
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις:
$y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x+2$ και $y = \frac{1}{2}x - 3$.

2 Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $y = -3x + 2$, όταν:
α) ο x είναι πραγματικός αριθμός.
β) $x \geq 0$.
γ) $-2 \leq x \leq 5$.

3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση 2 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη –3.

4 Στο σχήμα δίνονται τα σημεία Α(1, 1) και Β(2, 3).
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με $\sqrt{5}$.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$ διέρχεται από τα σημεία Α και Β.



5 Όταν χρησιμοποιούμε ταξί, πληρώνουμε 0,5 € για τη σημαία και 0,2 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Να βρείτε τη συνάρτηση που μας δίνει το ποσό y που θα πληρώσουμε για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.

6 Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $2x - 3y = 6$. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες.

7 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $x + y = 2$.

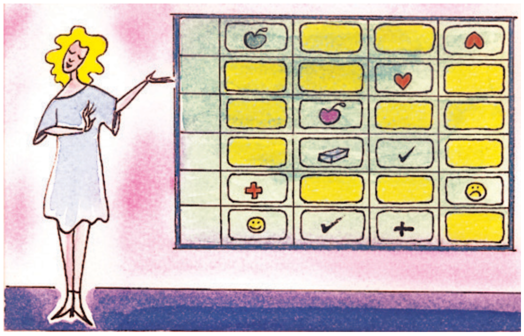
8 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $y = 2$, $y = 3$, $x = 1$ και $x = -2$.
Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ;
Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;

9 Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με κόστος 200 € το τεμάχιο.
Επίσης, πληρώνει 100 € την ημέρα για την ενοικίαση μιας αποθήκης, για να αποθηκεύει τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

α) Να εκφράσετε το συνολικό ημερήσιο κόστος y του εργοστασίου ως συνάρτηση του αριθμού x των ηλεκτρονικών υπολογιστών που κατασκευάζει ημερησίως.

β) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.

10 Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι κάθε παίκτης ξεκινάει έχοντας ως δώρο από την εταιρεία παραγωγής 1000 €. Στη συνέχεια, πρέπει να απαντήσει σε 20 ερωτήσεις. Σε κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 100 €, ενώ σε κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 50 €. Συμβολίζουμε με x το πλήθος των σωστών απαντήσεων.



α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το πλήθος ω των λανθασμένων απαντήσεων.

β) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το συνολικό κέρδος y του παίκτη.

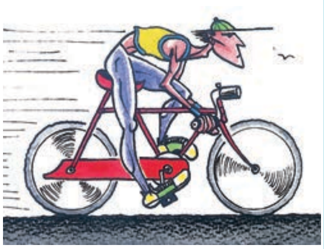
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση y.

3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή

Ποσά αντιστρόφως ανάλογα – Η υπερβολή

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, όταν ένα σώμα κινείται, η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση: $\text{Ταχύτητα} = \frac{\text{Διάστημα}}{\text{Χρόνος}}$ ή $υ = \frac{s}{t}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



Η απόσταση s δύο πόλεων είναι 60 χιλιόμετρα. Αν με t παραστήσουμε το χρόνο (σε ώρες) που χρειάζεται ο ποδηλάτης να διανύσει την απόσταση των δύο πόλεων:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος t	1	2	4	10	20	30	60
Ταχύτητα υ							
Απόσταση s	60	60	60	60	60	60	60

Τι παριστάνει το γινόμενο υ · t;

β) Γιατί λέμε ότι η ταχύτητα υ και ο χρόνος t είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα;

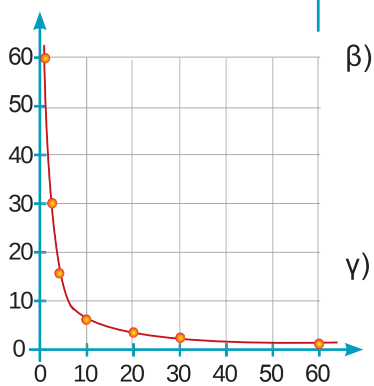
γ) Να εκφράσετε την ταχύτητα υ ως συνάρτηση του χρόνου t. Χρησιμοποιήστε τις τιμές του πίνακα του ερωτήματος (α) για να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Χρόνος t	1	2	4	10	20	30	60
Ταχύτητα υ	60	30	15	6	3	2	1
Απόσταση s	60	60	60	60	60	60	60

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο υ · t παριστάνει την απόσταση s και είναι πάντοτε 60, δηλαδή $υ \cdot t = 60$.



β) Τα ποσά υ και t, όπως είδαμε και σε προηγούμενες τάξεις, λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, γιατί όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό, τότε η τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό. Το γινόμενο υ · t των ποσών υ και t, αν είναι αντιστρόφως ανάλογα, είναι σταθερό.

γ) Σε σύστημα συντεταγμένων τοποθετούμε όλα τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη (t,υ) του παραπάνω πίνακα. Μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Όταν δύο ποσά **x** και **y** είναι **αντιστρόφως ανάλογα,** τότε **το γινόμενο** των αντιστοίχων τιμών τους είναι **σταθερό.** Αν $\alpha \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των x και y, τότε το **y** εκφράζεται ως συνάρτηση του **x** από τον τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$.

Σε δύο ανάλογα ποσά x και y, οι τιμές τους μπορεί να είναι και αρνητικοί αριθμοί.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

α) Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{3}{x}$, $x \neq 0$. *Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.*

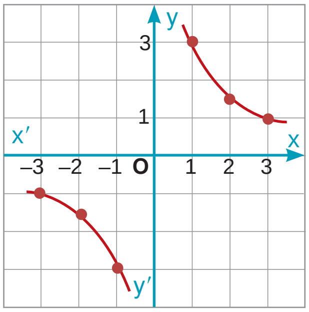
x	–3	–2	–1	1	2	3
y						

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{3}{x}$, $x \neq 0$.

Λύση

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

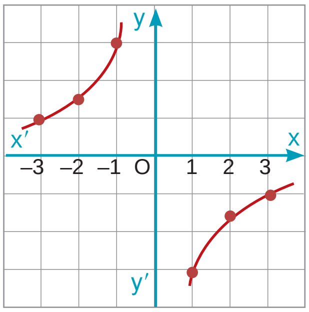
x	–3	–2	–1	1	2	3
y	–1	$-\frac{3}{2}$	–3	3	$\frac{3}{2}$	1



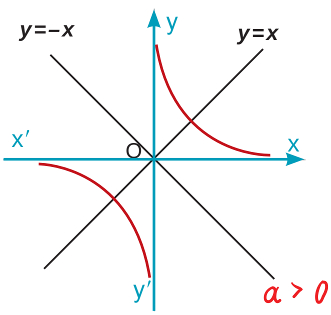
Σε σύστημα συντεταγμένων τοποθετούμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών (x, y) του παραπάνω πίνακα. Τα σημεία αυτά σχηματίζουν δύο γραμμές, μία στο πρώτο τεταρτημόριο και μία στο τρίτο, όπως στο διπλανό σχήμα.

β) Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–3	–2	–1	1	2	3
y	1	$\frac{3}{2}$	3	–3	$-\frac{3}{2}$	–1



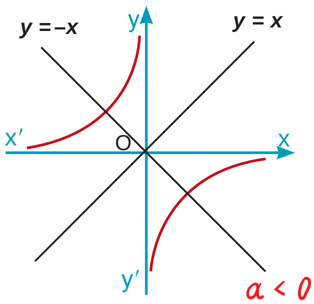
Τα σημεία αυτά σχηματίζουν δύο γραμμές, μία στο δεύτερο τεταρτημόριο και μία στο τέταρτο τεταρτημόριο, όπως στο διπλανό σχήμα.



Οι γραφικές παραστάσεις που κάναμε λέγονται **υπερβολές** και οι δύο γραμμές που τις συνθέτουν λέγονται **κλάδοι** της υπερβολής.

Γενικά:

Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης $\mathbf{y = \frac{\alpha}{x}}$, όπου $\alpha \neq 0$ λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται **από δύο κλάδους** που βρίσκονται:
– Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\mathbf{\alpha > 0}$.
– Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\mathbf{\alpha < 0}$.



Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:
– **Κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων**.
– **Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις y = x και y = –x.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές: $y = \frac{6}{x}$, $x \neq 0$ και $y = -\frac{6}{x}$, $x \neq 0$.

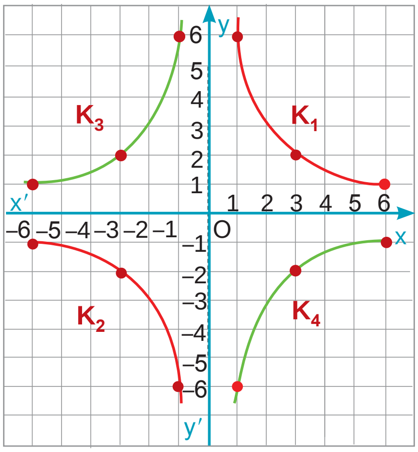
β) Ποιες είναι οι συμμετρίες που ισχύουν μεταξύ των κλάδων των παραπάνω υπερβολών;

Λύση: α) Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών:

x	–6	–3	–1	1	3	6
y	–1	–2	–6	6	2	1

x	–6	–3	–1	1	3	6
y	1	2	6	–6	–2	–1

Κατόπιν σχεδιάζουμε τις δύο υπερβολές.



β) Αν ονομάσουμε τους τέσσερις κλάδους K_1, K_2, K_3, K_4 όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε έχουμε ότι:

- Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_3 ως προς τον άξονα y′y.
- Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_4 ως προς τον άξονα x′x.
- Ο K_1 είναι συμμετρικός με τον K_2 ως προς την αρχή των αξόνων.

Παρόμοιες συμμετρίες ισχύουν και για τους άλλους κλάδους.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα;

α)

x	2	3	5
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

β)

x	2	3	5
y	0,2	0,3	0,5

γ)

x	2	3	5
y	6	4	2,4

δ)

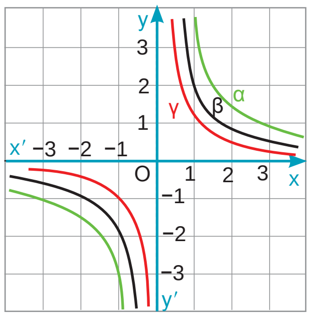
x	2	3	5
y	–2	–3	–5

2 Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{2}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 2.		
β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{5}{x}$ διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.		
γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{10}{x}$ βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων.		
δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{5}{x}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.		

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις (α), (β) και (γ) τριών υπερβολών. Να αντιστοιχίσετε σε καθεμιά την εξίσωσή της.

Α.	$y = \frac{1}{x}$
Β.	$y = \frac{2}{x}$
Γ.	$y = \frac{3}{x}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x	1	2	3	4	6	12
y			4			

2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y = \dfrac{3}{x}$ β) $y = \dfrac{5}{x}$ γ) $y = \dfrac{20}{x}$.

3 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$y = \dfrac{12}{x}$ και $y = -\dfrac{12}{x}$.

4 Η απόσταση Γης - Σελήνης είναι περίπου ΓΣ = 380.000 χιλιόμετρα.

α) Ποια είναι η ταχύτητα σε km/h ενός πυραύλου που διανύει την απόσταση ΓΣ σε 3 ημέρες;

β) Να εκφράσετε την ταχύτητα υ ενός πυραύλου ως συνάρτηση του χρόνου t που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση ΓΣ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

5 Θεωρούμε όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 36 cm^2.

α) Ονομάζοντας x και y τις διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y								

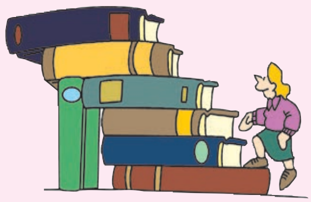
Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα μεγέθη x και y;

β) Να εκφράσετε το πλάτος y ενός τέτοιου ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους x.

γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Επανάληψη Κεφαλαίου 3

Συναρτήσεις

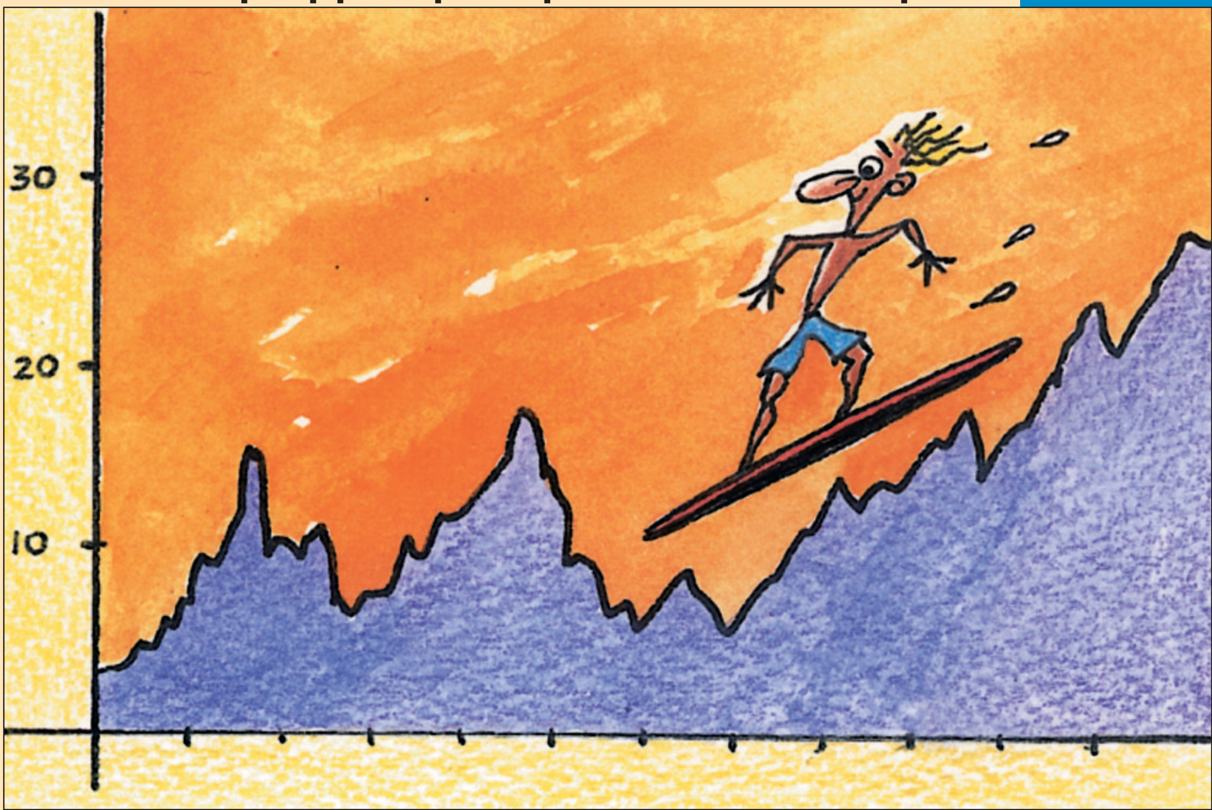


- Αν ο σταθερός λόγος $\dfrac{y}{x}$ δύο ανάλογων ποσών x και y είναι ίσος με α, τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από την ισότητα y = αx.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και έχει κλίση α.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής y = αx + β, $\beta \neq 0$ είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία y = αx και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη β.
- Μια εξίσωση της μορφής αx + βy = γ, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.
- Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό. Αν α είναι η τιμή του γινομένου x · y, το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τη συνάρτηση $y = \dfrac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$.
- Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής $y = \dfrac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$, βρίσκεται:
  - στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν α > 0
  - στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν α < 0.
- Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής $y = \dfrac{\alpha}{x}$, $x \neq 0$, έχει:
  - κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων
  - άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις y = x και y = –x.

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Περιγραφική Στατιστική



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η Στατιστική αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής μας.

Τα αποτελέσματα των εκλογών, οι προτιμήσεις των καταναλωτών, οι μονάδες τηλεθέασης αποτελούν μερικά μόνο παραδείγματα της χρήσης της Στατιστικής.
Αφού μελετήσουμε τις βασικές έννοιες, θα εξετάσουμε πώς τα στατιστικά αποτελέσματα παριστάνονται γραφικά μέσω διαγραμμάτων.

*Θα γνωρίσουμε, τέλος, τον τρόπο με τον οποίο ομαδοποιούμε παρατηρήσεις και θα μελετήσουμε δύο χαρακτηριστικές τιμές μιας στατιστικής έρευνας: τη **μέση τιμή** και τη **διάμεσο**.*

4.1. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Από μία έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών ενός Γυμνασίου στη Βόρεια Ελλάδα σχετικά με τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις τους προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα: Από τους 60 μαθητές που απάντησαν στην έρευνα, 12 μαθητές προτιμούν τον ΠΑΟΚ, 6 την ΑΕΚ, 9 τον Ολυμπιακό, 18 τον Άρη Θεσσαλονίκης, 3 τον Παναθηναϊκό, 9 τον Ηρακλή και 3 τον ΟΦΗ.

α) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών αυτού του Γυμνασίου που προτιμούν τον Άρη, τον ΠΑΟΚ και ποιο το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν τον Ηρακλή;

β) Ποια είναι τα αντίστοιχα ποσοστά για τις υπόλοιπες ομάδες;

γ) Είναι αξιόπιστα τα προηγούμενα αποτελέσματα, δηλαδή γενικεύονται για όλη την Ελλάδα;

Λύση

α) Οι μαθητές που προτιμούν τον Άρη είναι 18 στους 60. Μετατρέπουμε αυτόν τον αριθμό σε ποσοστό επί τοις εκατό: $\frac{18}{60} = 0,3 = 30\%$

Ομοίως, έχουμε:

- Για τον ΠΑΟΚ: $\frac{12}{60} = 0,2 = 20\%$
- Για τον Ηρακλή: $\frac{9}{60} = 0,15\% = 15\%$

β) Για τις υπόλοιπες ομάδες τα ποσοστά είναι:

- Ολυμπιακός: $\frac{9}{60} = 0,15 = 15\%$
- ΑΕΚ: $\frac{6}{60} = 0,1 = 10\%$
- Παναθηναϊκός: $\frac{3}{60} = 0,05 = 5\%$
- ΟΦΗ: $\frac{3}{60} = 0,05 = 5\%$

γ) Προφανώς, τα αποτελέσματα δεν είναι αξιόπιστα, δηλαδή δε μπορούν να γενικευθούν για όλο το μαθητικό πληθυσμό των Γυμνασίων της Ελλάδας.

Για να εξασφαλίσουμε αξιοπιστία στα αποτελέσματα, θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα διαφορετικά.

Θέλουμε να εξετάσουμε τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις των μαθητών όλων των Γυμνασίων της Ελλάδας. Οι μαθητές αυτοί αποτελούν τον *«πληθυσμό»* της έρευνάς μας.

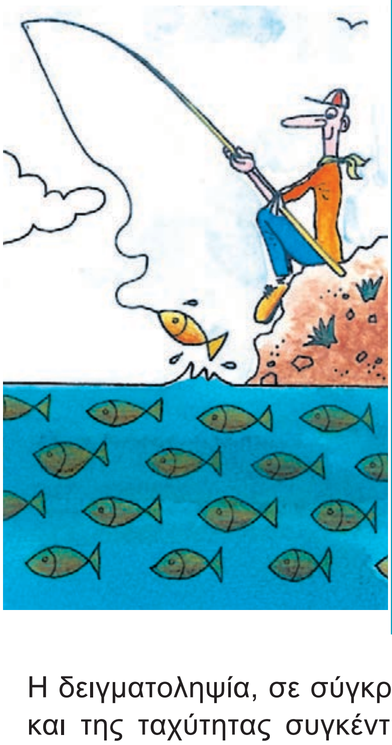
Γενικά:

Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, λέγεται **πληθυσμός**. Το χαρακτηριστικό (π.χ. η ομάδα προτίμησης στο ποδόσφαιρο) ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται **μεταβλητή**.

Επειδή στην Ελλάδα υπάρχουν περίπου 400.000 μαθητές Γυμνασίου, δε θα μπορούσαμε φυσικά να τους ρωτήσουμε όλους. Στη δραστηριότητα είχαμε ένα «**δείγμα**» από 60 μαθητές, δηλαδή κάναμε μία «**δειγματοληψία**» (ή «**δημοσκόπηση**»). Το πλήθος των μαθητών που ρωτήσαμε (60 άτομα), αποτελεί το «**μέγεθος του δείγματος**».
Στη συνέχεια, διαπιστώσαμε ότι τα αποτελέσματα που βρήκαμε δε μπορούν να γενικευθούν για όλο τον πληθυσμό, αφού το δείγμα ήταν μόνο από μία περιοχή της Ελλάδας και δεν είναι «**αντιπροσωπευτικό**» του πληθυσμού.

Απογραφή και Δειγματοληψία

Η συγκέντρωση στατιστικών δεδομένων γίνεται με απογραφή, με διαρκή εγγραφή και κυρίως με δειγματοληψία.



- Με την απογραφή συγκεντρώνονται στοιχεία απ' όλα τα άτομα του πληθυσμού σε μία καθορισμένη ημερομηνία. Στη χώρα μας η απογραφή του πληθυσμού γίνεται κάθε 10 χρόνια από την ΕΣΥΕ (Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδας).

- Η διαρκής εγγραφή γίνεται καθημερινά στα ληξιαρχεία στα οποία καταχωρούνται γεννήσεις, γάμοι κ.τ.λ., στα τελωνεία για εμπορεύματα, στα νοσοκομεία για ασθένειες κ.τ.λ.

- Σε μια δειγματοληψία συγκεντρώνουμε στοιχεία μόνο από ένα μέρος του πληθυσμού, που λέγεται δείγμα και προσπαθούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.

Η δειγματοληψία, σε σύγκριση με την απογραφή, έχει το πλεονέκτημα του μικρού κόστους και της ταχύτητας συγκέντρωσης των πληροφοριών. Από την άλλη πλευρά, όμως, έχει το μειονέκτημα ότι ο σχεδιασμός και η εκτέλεσή της χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή, γιατί διαφορετικά δεν οδηγούν σε σωστά συμπεράσματα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για να εκτιμήσουμε το αποτέλεσμα των ερχομένων βουλευτικών εκλογών, ρωτήσαμε 3.000 φοιτητές για το κόμμα που θα ψηφίσουν.

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός και ποιο είναι το δείγμα; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;

β) Αν οι φοιτητές προτίμησαν τα κόμματα Α, Β, Γ με ποσοστά 40%, 35% και 25% αντίστοιχα, να βρείτε πόσοι από αυτούς προτίμησαν το Α κόμμα, πόσοι το Β και πόσοι το Γ;

Λύση: α) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι Έλληνες ψηφοφόροι, ενώ το δείγμα είναι οι 3.000 φοιτητές. Το δείγμα αυτό δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, γιατί οι φοιτητές αποτελούν μια ειδική κατηγορία ψηφοφόρων (έχουν νεαρή ηλικία, ανώτερο επίπεδο σπουδών και ριζοσπαστικό τρόπο σκέψης).

β) Το κόμμα Α το προτίμησαν $3.000\,\frac{40}{100} = 1.200$ φοιτητές.

Το κόμμα Β το προτίμησαν $3.000\,\frac{35}{100} = 1.050$ φοιτητές.

Το κόμμα Γ το προτίμησαν $3.000\,\frac{25}{100} = 750$ φοιτητές.

ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει απορρυπαντικά για να προωθήσει ένα νέο προϊόν, έκανε πρώτα μία έρευνα της ελληνικής αγοράς. Απευθύνθηκε σε μια εταιρεία δημοσκοπήσεων και ζήτησε να μάθει πόσες φορές οι ελληνίδες νοικοκυρές αγοράζουν απορρυπαντικό κάθε μήνα. Η εταιρεία δημοσκοπήσεων επέλεξε να ρωτήσει 2000 νοικοκυρές και έδωσε τα αποτελέσματα στον εργοστασιάρχη.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Ο πληθυσμός της έρευνας είναι:
- α) Όλοι οι έλληνες πολίτες.
- β) 2000 νοικοκυρές.
- γ) Όλες οι ελληνίδες νοικοκυρές.
- δ) Όλοι οι πελάτες των σούπερ-μάρκετ.

2. Η μεταβλητή της έρευνας είναι:
- α) Οι ελληνίδες νοικοκυρές.
- β) Τα απορρυπαντικά που κυκλοφορούν στην Ελλάδα.
- γ) Το απορρυπαντικό που χρησιμοποιούν οι ελληνίδες νοικοκυρές.
- δ) Πόσες φορές αγοράζουν απορρυπαντικό οι ελληνίδες νοικοκυρές.

3. Το μέγεθος του δείγματος είναι:
- α) Περίπου 5.000.000 ελληνίδες νοικοκυρές.
- β) Οι 2000 νοικοκυρές που ρωτήθηκαν.
- γ) Το πλήθος των απορρυπαντικών που αγοράζονται κάθε μήνα.
- δ) Όλες οι μάρκες απορρυπαντικών που κυκλοφορούν στην ελληνική αγορά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε χωρίς μολύβι και χαρτί:
α) το 100% του 72
β) το 50% του 60
γ) το 25% του 80
δ) το 10% του 70
ε) το 20% του 80
στ) το 72% του 100

2 Να υπολογίσετε:
α) το 15% του 80
β) το 40% του 60
γ) το 35% του 120
δ) το 75% του 80
ε) το 30% του 30
στ) το 5% του 1000

3 Το 15 είναι το 25% του αριθμού:
α) 25, β) 60, γ) 100, δ) 40.

4 Το 15% του αριθμού 200 είναι:
α) 30, β) 7, γ) 21, δ) 42.

5 Σε μια έρευνα που έγινε σε 2000 άτομα οι 300 ήταν νέοι κάτω των 25 ετών. Τι ποσοστό του δείγματος αντιπροσωπεύει ο αριθμός αυτός;

6 Σε μια δημοσκόπηση που έγινε για τις Προεδρικές εκλογές, 360 άτομα απάντησαν ότι προτιμούν τον υποψήφιο «Α», 280 άτομα τον υποψήφιο «Β», και 160 άτομα τον υποψήφιο «Γ». Ποια είναι τα ποσοστά κάθε υποψηφίου σ' αυτή τη δημοσκόπηση;

7 Σ' ένα σχολείο φοιτούν 120 αγόρια και 180 κορίτσια. Στη Β′ Γυμνασίου φοιτούν συνολικά 90 άτομα.
α) Ποιο είναι το ποσοστό των κοριτσιών στο σχολείο;
β) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών της Β′ Γυμνασίου;

8 Για να βρούμε τα ποσοστά των οπαδών των ομάδων ποδοσφαίρου, ρωτήσαμε 1000 άτομα στον Πειραιά ποια ομάδα υποστηρίζουν.

Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας και ποιο το δείγμα; Είναι το δείγμα αξιόπιστο;

9 Η Κατερίνα για να βρεί το δημοφιλέστερο τραγούδι την περίοδο αυτή, σκοπεύει να ρωτήσει τους μαθητές ενός σχολείου. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το αποτέλεσμα της έρευνας δε θα είναι αντικειμενικό; Τι πρέπει να κάνει η Κατερίνα για να καταλήξει σ' ένα αξιόπιστο συμπέρασμα;

4.2. Γραφικές παραστάσεις

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Μια δισκογραφική εταιρεία προσπαθεί να επεκτείνει τις πωλήσεις της σε εφήβους. Προτού να επενδύσει σε είδη μουσικής που προτιμούν οι μαθητές, αποφασίζει να κάνει μία έρευνα ανάμεσα σε 200 μαθητές που επέλεξε τυχαία απ' όλη την Ελλάδα. Ο υπεύθυνος, που έκανε την έρευνα, παρουσίασε στον διευθυντή της εταιρείας τις παρακάτω τρεις γραφικές παραστάσεις (διαγράμματα).

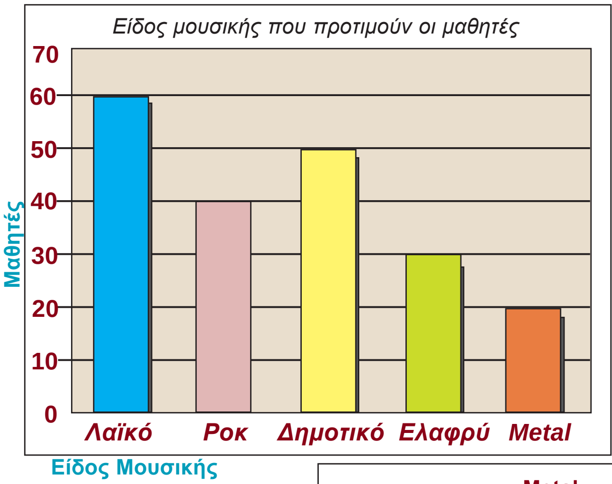
α) Πόσοι μαθητές προτίμησαν κάθε είδος μουσικής;

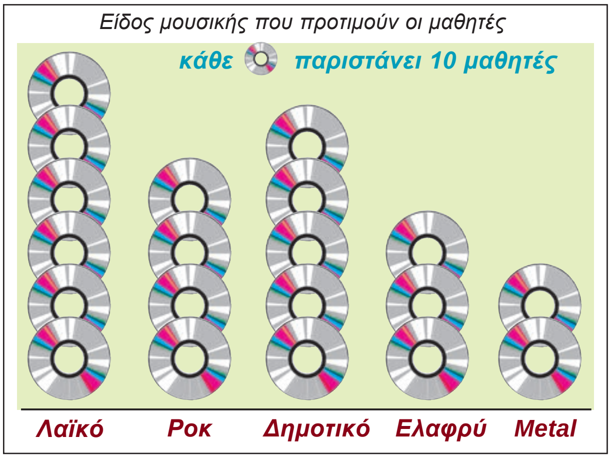
β) Σε ποια είδη μουσικής προτείνετε να επενδύσει η εταιρεία;

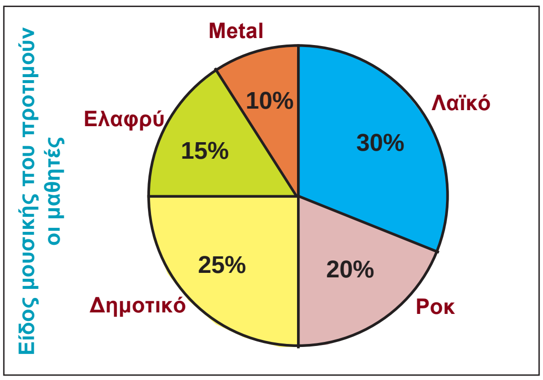
Λύση

α) Παρατηρούμε ότι 60 μαθητές στους 200 προτιμούν λαϊκό τραγούδι, δηλαδή ποσοστό 30%. 40 μαθητές στους 200 προτιμούν το ροκ, δηλαδή ποσοστό 20%. 50 μαθητές στους 200 προτιμούν το δημοτικό τραγούδι, δηλαδή ποσοστό 25%. 30 μαθητές στους 200 προτιμούν το ελαφρύ, δηλαδή ποσοστό 15%, ενώ 20 μαθητές στους 200 προτιμούν το Metal, δηλαδή ποσοστό 10%.

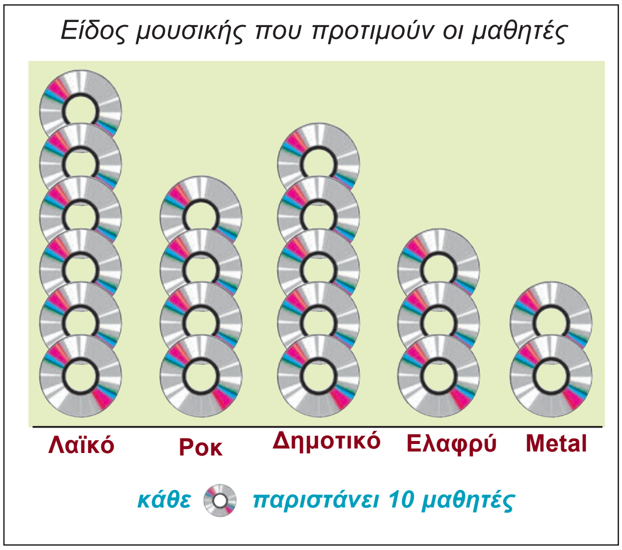
β) Η εταιρεία πρέπει να επενδύσει κατά σειρά προτεραιότητας στο λαϊκό, δημοτικό, ροκ, ελαφρύ και metal.





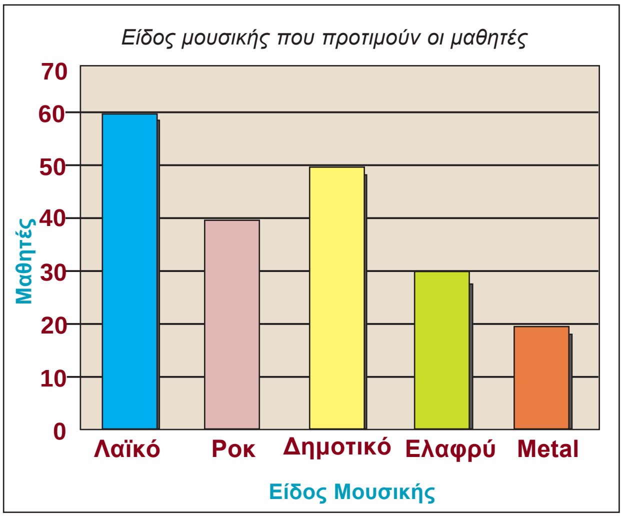


Τέτοια διαγράμματα βλέπουμε καθημερινά στις εφημερίδες και τα περιοδικά, που παρουσιάζουν τα αποτελέσματα μιας έρευνας με τρόπο πιο παραστατικό και κατανοητό. Ας δούμε μερικά διαγράμματα που χρησιμοποιούμε πιο συχνά:



Εικονογράμματα

Στα **εικονογράμματα** χρησιμοποιούμε την εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές αυτό παρουσιάζεται στην έρευνά μας. Σ' ένα τέτοιο διάγραμμα, βέβαια, πρέπει να υπάρχει ο **τίτλος** που μας κατατοπίζει για το είδος και τη μεταβλητή της έρευνας, η **κλίμακα** που δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων που παριστάνει η εικόνα (π.χ. στο διπλανό εικονόγραμμα, κάθε CD παριστάνει 10 μαθητές) καθώς και **ο τίτλος κάθε στήλης** (π.χ. λαϊκό - ροκ - δημοτικό κ.τ.λ.)

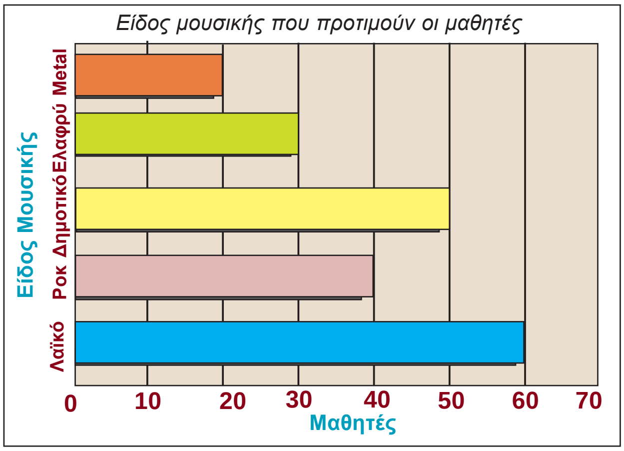


Ραβδογράμματα

Στα **ραβδογράμματα** χρησιμοποιούμε ορθογώνια για να δείξουμε το πλήθος των μαθητών που δήλωσαν ότι προτιμούν ένα συγκεκριμένο είδος μουσικής. Σ' ένα τέτοιο ραβδόγραμμα πρέπει, βέβαια, να υπάρχουν ο τίτλος του που μας κατατοπίζει για το είδος της έρευνας και οι τίτλοι των αξόνων. Αυτοί οι τίτλοι αξόνων μας δείχνουν ότι ο οριζόντιος άξονας παριστάνει τα είδη της μουσικής και ο κάθετος άξονας τον αριθμό των μαθητών.

Τα ραβδογράμματα, γενικά, σχεδιάζονται εύκολα και είναι πιο ακριβή από τα εικονογράμματα.

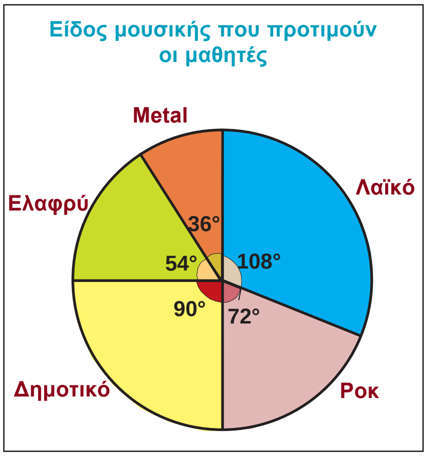
Τα ορθογώνια ενός ραβδογράμματος μπορεί να είναι τοποθετημένα οριζόντια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Πολλές φορές αντί για ορθογώνια, σχεδιάζουμε κάθετες γραμμές.

Κυκλικά διαγράμματα

Στα **κυκλικά διαγράμματα** μπορούμε να δούμε τι μέρος του δείγματος προτιμά κάθε είδος μουσικής. Συγκεκριμένα, το δείγμα παριστάνεται με έναν κυκλικό δίσκο και οι τιμές της μεταβλητής με κυκλικούς τομείς



διαφορετικού χρώματος. Πώς, όμως, υπολογίζουμε τη γωνία κάθε κυκλικού τομέα;
Επειδή έλαβαν μέρος στην έρευνα 200 άτομα και ο κύκλος έχει 360°, θα πρέπει τα 200 άτομα να αντιστοιχούν στις 360°.
Επομένως, τα 60 άτομα που δήλωσαν ότι προτιμούν το λαϊκό τραγούδι, θα πρέπει να αντιστοιχούν σε μία γωνία θ, τέτοια ώστε: $\frac{200}{60} = \frac{360°}{\theta}$.

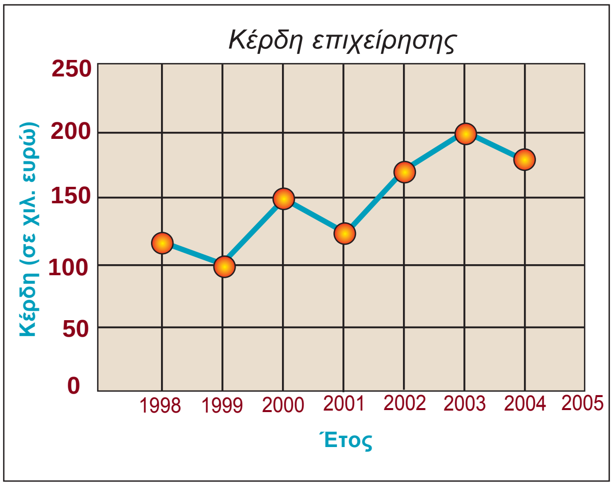
Επομένως έχουμε: $\theta = \frac{60}{200} \cdot 360°$ ή $\theta = 108°$.

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες γωνίες του κυκλικού διαγράμματος:

- Για το ροκ: $\theta = \frac{40}{200} \cdot 360° = 72°$
- Για το δημοτικό: $\theta = \frac{50}{200} \cdot 360° = 90°$
- Για το ελαφρύ: $\theta = \frac{30}{200} \cdot 360° = 54°$
- Για το metal: $\theta = \frac{20}{200} \cdot 360° = 36°$

Χρονογράμματα

Τα **χρονογράμματα** είναι διαγράμματα, τα οποία χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τη χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να παραστήσουμε τα κέρδη μιας εταιρείας (σε χιλιάδες €) κατά τα έτη 1998 - 2004 (πίνακας 1), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διπλανό χρονόγραμμα.



Έτος	Κέρδη (χιλ. €)
1998	120
1999	100
2000	150
2001	130
2002	170
2003	200
2004	180

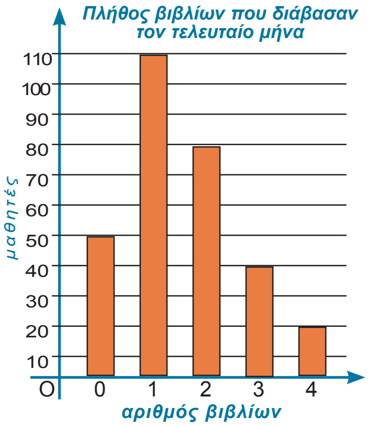
Πίνακας 1

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε μια έρευνα που έγινε σε δείγμα 300 μαθητών σχετικά με το πλήθος των εξωσχολικών βιβλίων που διάβασαν τον τελευταίο μήνα, προέκυψαν τα αποτελέσματα του διπλανού πίνακα. Για τα δεδομένα αυτά να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα και εικονόγραμμα (με εικόνα  *= 10 μαθητές).*

Αριθμός βιβλίων	Μαθητές
0	50
1	110
2	80
3	40
4	20

Λύση: ➤ **Για το ραβδόγραμμα:**



Στον οριζόντιο άξονα x′x τοποθετούμε τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 της πρώτης στήλης του πίνακα και στον κατακόρυφο άξονα y′y τους αριθμούς 0 έως 110 (ανά 10). Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ορθογώνια με ίσες βάσεις και αντίστοιχα ύψη, ίσα με τους αριθμούς της δεύτερης στήλης του πίνακα.

➤ **Για το κυκλικό διάγραμμα:**

Για να κατασκευάσουμε το κυκλικό διάγραμμα, πρέπει να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες. Το πλήθος των ατόμων του δείγματος (300 άτομα) αντιστοιχεί στις 360° του κύκλου. Άρα:

– Για τους 50 μαθητές που δε διάβασαν κανένα βιβλίο έχουμε: $\frac{300}{50} = \frac{360°}{\theta}$

οπότε: $\theta = \frac{50}{300} \cdot 360 = \frac{1}{6} \cdot 360 = 60°$.

– Ομοίως, για τους 110 μαθητές που διάβασαν ένα βιβλίο έχουμε:

$\theta = \frac{110}{300} \cdot 360 = 11 \cdot 12 = 132°$.

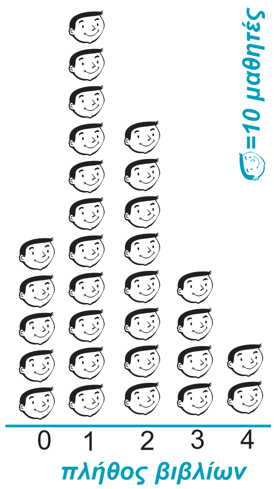
– Για τους 80 μαθητές που διάβασαν 2 βιβλία: $\theta = \frac{80}{300} \cdot 360 = 8 \cdot 12 = 96°$.

– Για τους 40 μαθητές που διάβασαν 3 βιβλία: $\theta = \frac{40}{300} \cdot 360 = 4 \cdot 12 = 48°$.

– Για τους 20 μαθητές που διάβασαν 4 βιβλία: $\theta = \frac{20}{300} \cdot 360 = 2 \cdot 12 = 24°$.

Με τη βοήθεια ενός μοιρογνωμόνιου χωρίζουμε τον κύκλο σε κυκλικούς τομείς με επίκεντρες γωνίες 60°, 132°, 96°, 48° και 24° και συμπληρώνουμε τους τίτλους σε κάθε κυκλικό τομέα.

➤ **Για το εικονόγραμμα:**



Αφού η εικόνα ☺ αντιστοιχεί σε 10 μαθητές:

– Για 50 μαθητές που δε διάβασαν κανένα βιβλίο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 5 φορές την εικόνα $\left(\frac{50}{10} = 5\right)$.

– Ομοίως, για τους 110 μαθητές που διάβασαν ένα βιβλίο, θα χρησιμοποιήσουμε $\frac{110}{10} = 11$ φορές την εικόνα.

– Ομοίως, βρίσκουμε για 80 μαθητές, 8 φορές την εικόνα.

– Για 40 μαθητές, 4 φορές την εικόνα.

– Για 20 μαθητές, 2 φορές την εικόνα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ρωτήσαμε μερικούς μαθητές ενός Γυμνασίου πόσες φορές πήγαν στον κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα.

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ	Δ
1.	Το πλήθος των μαθητών που ρωτήθηκαν ήταν:	8	5	25	100
2.	Πόσοι μαθητές πήγαν 3 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	6	5	8	0
3.	Πόσοι μαθητές πήγαν 5 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	3	0	8	5
4.	Πόσοι μαθητές πήγαν τουλάχιστον 2 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	10	8	18	15
5.	Πόσοι μαθητές πήγαν το πολύ 2 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	10	8	18	15
6.	Οι μαθητές που δεν πήγαν ούτε μία φορά σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα αποτελούν ποσοστό:	3%	12%	10%	30%

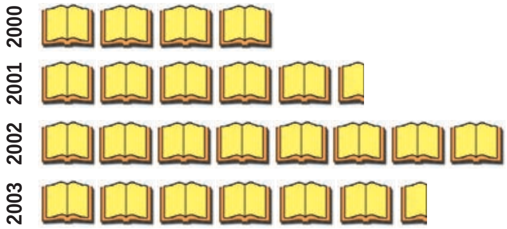
2. Σε μία έρευνα ρωτήθηκαν 400 φίλαθλοι μιας πόλης ποια από τις τρεις ομάδες ποδοσφαίρου της πόλης τους είναι η καλύτερη. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.
Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

		Α	Β	Γ	Δ
1.	Τι ποσοστό αποτελούν οι οπαδοί της «κίτρινης καταιγίδας»;	25%	90%	30%	50%
2.	Τι ποσοστό αποτελούν οι οπαδοί της «πράσινης λαίλαπας»;	35%	40%	90%	30%
3.	Τι ποσοστό αποτελούν οι οπαδοί της «κόκκινης θύελλας»;	160%	35%	80%	25%
4.	Πόσα άτομα υποστηρίζουν την «κίτρινη καταιγίδα»;	90	200	100	25
5.	Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στην «κόκκινη θύελλα» είναι:	126°	150°	160°	144°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Το παρακάτω εικονόγραμμα μας πληροφορεί για τον αριθμό των βιβλίων που πούλησε ένας εκδοτικός οίκος τα έτη 2000, 2001, 2002 και 2003.

( = *20.000 βιβλία*)



α) Να βρείτε πόσα βιβλία πουλήθηκαν κάθε έτος και πόσα συνολικά και τα τέσσερα έτη.

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των συνολικών πωλήσεων που αντιπροσωπεύουν οι πωλήσεις που πραγματοποιήθηκαν το έτος 2002.

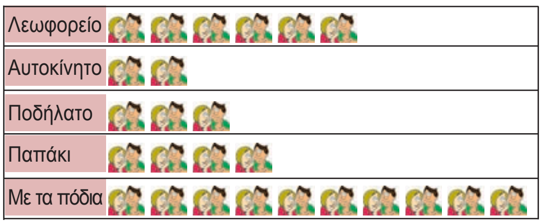
γ) Να μετατρέψετε το παραπάνω εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα.

2 Με τη βοήθεια του παρακάτω εικονογράμματος (=12 μαθητές):

α) Να βρείτε πόσους μαθητές έχει συνολικά το Γυμνάσιο αυτό.

β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν το λεωφορείο.

γ) Να παραστήσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα.



3 Σε μία αποθήκη υπάρχουν τέσσερις τύποι κινητών τηλεφώνων Α, Β, Γ, Δ σε ποσοστό 10%, 30%, 40%, 20% αντίστοιχα.

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

β) Να βρείτε πόσα κινητά τηλέφωνα υπάρχουν από κάθε τύπο, αν ο συνολικός τους αριθμός είναι 400.

4 Ρωτήσαμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου πόσες ημέρες απουσίασαν από το σχολείο τον τελευταίο μήνα. Οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός ημερών	Αριθμός μαθητών
0	35
1	12
2	8
3	2
4	
ΣΥΝΟΛΟ	**60**

α) Πόσοι μαθητές απουσίασαν 4 ημέρες; Τι ποσοστό αποτελούν αυτοί οι μαθητές;

β) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ραβδόγραμμα και με κυκλικό διάγραμμα.

5 Δίνεται το διπλανό κυκλικό διάγραμμα:

α) Να βρείτε τη γωνία ω.

β) Να το μετατρέψετε σε εικονόγραμμα.

6 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των λεπτών που μελετούν κατά μέσο όρο ημερησίως, οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου ενός σχολείου.

Αριθμός λεπτών	% Αγοριών	% Κοριτσιών
30′	6%	4%
60′	14%	12%
90′	33%	27%
120′	30%	33%
150′	12%	16%
180′	5%	8%

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ένα ραβδόγραμμα.

β) Να βρείτε το ποσοστό (%) των μαθητών που μελετούν τουλάχιστον 90′, καθώς και το ποσοστό των μαθητών που μελετούν το πολύ 120′.

4.3. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

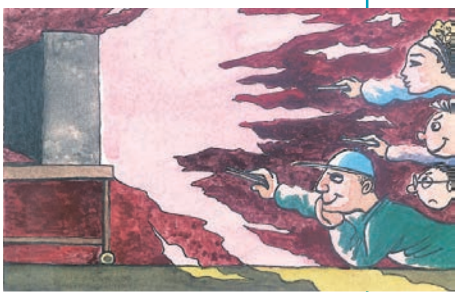
Συχνότητες

2	4	1	3	5	3	4	4	5	3
5	4	6	7	4	7	4	7	2	4
1	7	5	6	2	3	6	1	5	6
4	3	2	4	4	6	5	4	7	3
6	2	5	4	5	3	5	4	5	2

Ρωτήσαμε ένα δείγμα 50 μαθητών Γυμνασίου πόσες ώρες περίπου βλέπουν τηλεόραση την εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους (με τη σειρά που καταγράφηκαν) φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **παρατηρήσεις**.

Τα αποτελέσματα αυτά, όμως, έτσι όπως είναι τοποθετημένα, δε μας δίνουν μια σαφή εικόνα της έρευνας. Δε φαίνεται εύκολα, δηλαδή, πόσοι μαθητές βλέπουν τηλεόραση π.χ. 5 ώρες την εβδομάδα και πόσοι 3 ώρες την εβδομάδα. Για τον λόγο αυτό, τοποθετούμε τα παραπάνω στατιστικά δεδομένα, σε έναν πίνακα, ως εξής:



Ώρες (τιμές) τηλεθέασης την εβδομάδα	Διαλογή	Αριθμός μαθητών (συχνότητες)
1	|||	3
2	𝍸 |	6
3	𝍸 ||	7
4	𝍸 𝍸 |||	13
5	𝍸 𝍸	10
6	𝍸 |	6
7	𝍸	5
	ΣΥΝΟΛΟ	50

Πίνακας 1

Όπως βλέπουμε:

- Στην πρώτη στήλη του παραπάνω πίνακα έχουμε γράψει κατά σειρά μεγέθους το πλήθος των ωρών που μπορεί κάποιος μαθητής να έχει παρακολουθήσει τηλεόραση. Οι αριθμοί αυτοί είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7 και λέγονται **τιμές**.

- Στη δεύτερη στήλη κάνουμε **διαλογή** των παρατηρήσεων. Δηλαδή, διαβάζουμε με τη σειρά τη λίστα των δεδομένων και καταγράφουμε κάθε παρατήρηση με συμβολικό τρόπο, με μία γραμμή (|) για την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής. Για ευκολία στην καταμέτρηση σχηματίζουμε πεντάδες (𝍸).

- Στην τρίτη στήλη μεταφέρουμε τα αποτελέσματα της διαλογής. Έτσι, η απάντηση «βλέπω περίπου 3 ώρες την εβδομάδα τηλεόραση» εμφανίζεται 7 φορές. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τιμή «3 ώρες» έχει **συχνότητα** 7. Ομοίως, η τιμή «4 ώρες» έχει συχνότητα 13 και η τιμή «7 ώρες» έχει συχνότητα 5.
  Γενικά, στον παραπάνω πίνακα φαίνεται πώς κατανέμονται οι 50 μαθητές του δείγματος ως προς το χαρακτηριστικό: «πόσες ώρες βλέπουν τηλεόραση την εβδομάδα». Για τον λόγο αυτό, ο συγκεκριμένος πίνακας δίνει μια **κατανομή συχνοτήτων**.

Σχετικές Συχνότητες

Ο παραπάνω πίνακας μας δίνει κάποιες πληροφορίες, όπως για παράδειγμα, ότι η τιμή 4 έχει συχνότητα 13 (δηλαδή 13 από τους μαθητές απάντησαν ότι βλέπουν τηλεόραση 4 ώρες την εβδομάδα). Η συχνότητα όμως αυτή (δηλαδή ο αριθμός 13) δεν έχει καμιά αξία μόνη της, αν δεν αναφερθεί ο αριθμός των μαθητών που ρωτήθηκαν. Πράγματι, άλλη αξία έχει η συχνότητα 13 στους 50 και άλλη θα έχει η συχνότητα 13 στους 100 ή 13 στους 1000 μαθητές.

Δηλαδή, είναι ανάγκη να ξέρουμε τι μέρος του δείγματος αποτελούν οι 13 μαθητές. Το μέρος αυτό εκφράζεται με το κλάσμα $\frac{13}{50}$, το οποίο λέγεται **σχετική συχνότητα** της τιμής 4. Συνήθως, τη σχετική συχνότητα τη μετατρέπουμε σε ποσοστό επί τοις εκατό %.

Έτσι, έχουμε: $\frac{13}{50} = 0{,}26 = 26\%$.

Δηλαδή, το 26% των μαθητών αυτού του Γυμνασίου βλέπει 4 ώρες την εβδομάδα τηλεόραση.

Για να βρούμε τη **σχετική συχνότητα** μιας τιμής, **διαιρούμε τη συχνότητα της τιμής αυτής με το πλήθος όλων των παρατηρήσεων**. Στη συνέχεια, εκφράζουμε τον αριθμό αυτό ως ποσοστό επί τοις εκατό (%).

Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε όλες τις σχετικές συχνότητες του πίνακα συχνοτήτων που είναι αντίστοιχα:

$\frac{3}{50} = 0{,}06 = 6\%$, $\frac{6}{50} = 0{,}12 = 12\%$, $\frac{7}{50} = 0{,}14 = 14\%$, $\frac{13}{50} = 0{,}26 = 26\%$,

$\frac{10}{50} = 0{,}20 = 20\%$, $\frac{6}{50} = 0{,}12 = 12\%$ και $\frac{5}{50} = 0{,}10 = 10\%$.

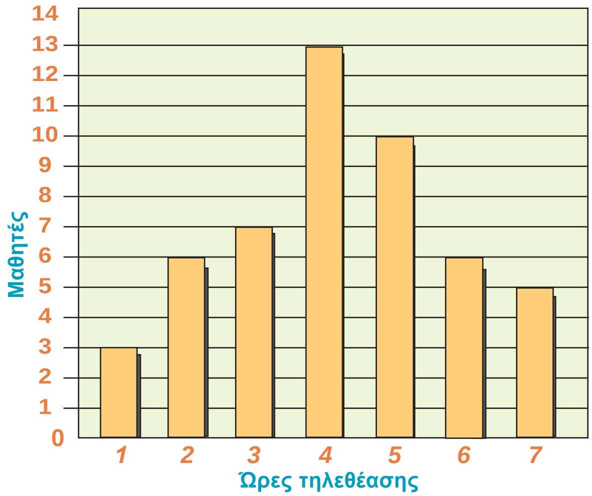
Τώρα μπορούμε προσθέτοντας μια ακόμη στήλη στον πίνακα 1 να έχουμε έναν πίνακα, στον οποίο να φαίνονται οι **τιμές**, οι **συχνότητες** και οι **σχετικές συχνότητες** των παρατηρήσεων της έρευνας. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων**.

Τιμές (ώρες) τηλεθέασης	Διαλογή	Συχνότητες (μαθητές)	Σχετικές Συχνότητες (%)
1	|||	3	6
2	𝍸 |	6	12
3	𝍸 ||	7	14
4	𝍸 𝍸 |||	13	26
5	𝍸 𝍸	10	20
6	𝍸 |	6	12
7	𝍸	5	10
Πίνακας 2	ΣΥΝΟΛΟ	50	100

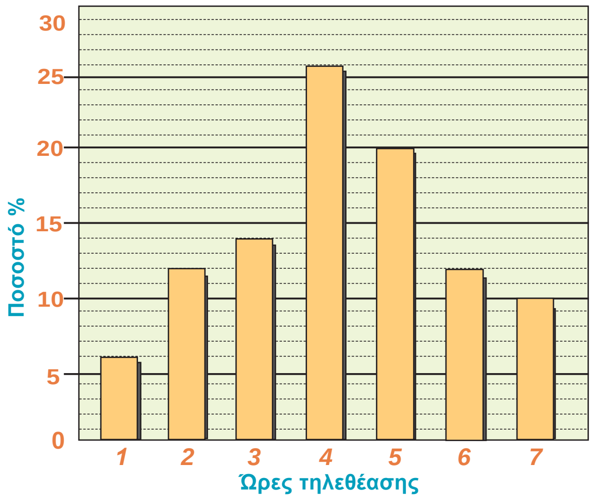
- Παρατηρούμε ότι: **το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ισούται με το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος.**
- Επίσης, **το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων ισούται με 100.**

Χρησιμοποιώντας τώρα τα στοιχεία του πίνακα 2 μπορούμε να έχουμε και μια εποπτική εικόνα της έρευνας, κάνοντας διαγράμματα, όπως τα παρακάτω:

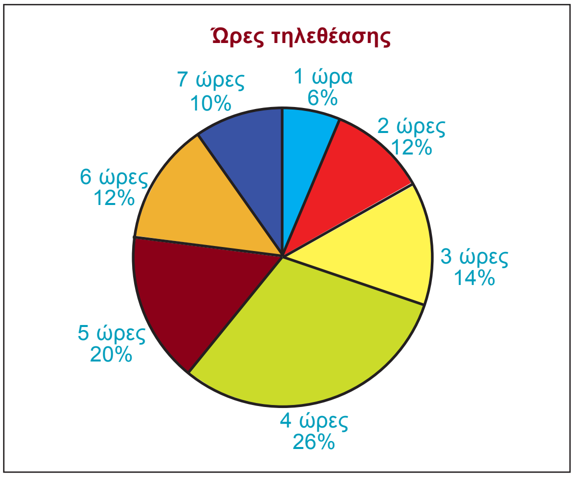
Εβδομαδιαίες ώρες τηλεθέασης
των μαθητών της Β′ Γυμνασίου



Εβδομαδιαίες ώρες τηλεθέασης
των μαθητών της Β′ Γυμνασίου



Εβδομαδιαίες ώρες τηλεθέασης
των μαθητών της Β′ Γυμνασίου



Υπολογισμός γωνιών κυκλικού διαγράμματος	
Τιμές	Γωνία
1	$\frac{3}{50} \cdot 360° = 21{,}6°$
2	$\frac{6}{50} \cdot 360° = 43{,}2°$
3	$\frac{7}{50} \cdot 360° = 50{,}4°$
4	$\frac{13}{50} \cdot 360° = 93{,}6°$
5	$\frac{10}{50} \cdot 360° = 72°$
6	$\frac{6}{50} \cdot 360° = 43{,}2°$
7	$\frac{5}{50} \cdot 360° = 36°$
Άθροισμα	360°

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στον διπλανό πίνακα έχουμε συγκεντρώσει τα αποτελέσματα μιας έρευνας, που έγινε σε μια κωμόπολη σχετικά με το πλήθος των παιδιών που έχει κάθε οικογένεια. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Παιδιά	0	1	2	3	4	5
Πλήθος οικογενειών	11	12	7	5	3	2

		Α	Β	Γ	Δ
1	Το συνολικό πλήθος οικογενειών που ρωτήθηκαν είναι:	5	6	40	12
2	Η συχνότητα της τιμής 4 είναι:	3	6	40	2
3	Η σχετική συχνότητα των οικογενειών που δεν έχουν παιδιά είναι:	$\frac{11}{100}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{40}{11}$	$\frac{100}{11}$
4	Η σχετική συχνότητα των οικογενειών που έχουν 3 παιδιά ως ποσοστό επί τοις εκατό είναι:	$\frac{5}{100}\cdot 40$	$\frac{100}{5}\cdot 40$	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{40}\cdot 100$
5	Αν κατασκευάσουμε κυκλικό διάγραμμα, η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στις οικογένειες που έχουν 1 παιδί είναι:	$\frac{12}{40}\cdot 360°$	$\frac{40}{12}\cdot 360°$	$\frac{40}{360°}\cdot 12$	$\frac{1}{12}\cdot 360°$

2. Μια έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών ενός Γυμνασίου της Κρήτης, σχετικά με τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις τους, κατέληξε σε έντονη «διαφωνία» με αποτέλεσμα να «χαθούν» μερικά στοιχεία. Μπορείτε να βρείτε τα στοιχεία που λείπουν;

Ομάδες	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες (επί τοις %)
ΑΕΚ		
ΠΑΟΚ		5
ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ	30	
ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΣ		10
ΟΦΗ	70	35
ΕΡΓΟΤΕΛΗΣ	30	
Σύνολο		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες:

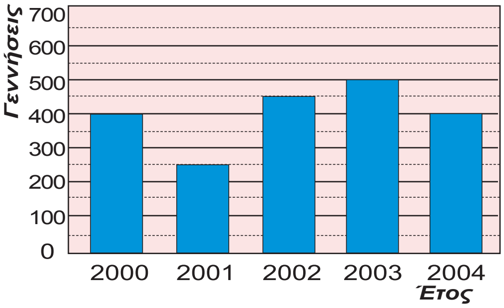
Αριθμός παιδιών των οικογενειών ενός χωριού

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
0	4	
1	10	
2	14	
3	8	
4	4	
Σύνολο		

Αριθμός απουσιών των μαθητών μιας τάξης κατά τον Νοέμβριο

Αριθμός απουσιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
0	3	
1	8	
2	12	
3	6	
4	6	
5		
6	1	
Σύνολο	**40**	

2 Ο αριθμός των γεννήσεων σ' ένα μαιευτήριο τα έτη 2000 έως 2004 φαίνεται στο παρακάτω ραβδόγραμμα:



α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να μετατρέψετε το ραβδόγραμμα σε χρονόγραμμα.
γ) Ποια χρονιά οι γεννήσεις παρουσίασαν αύξηση και ποια μείωση;

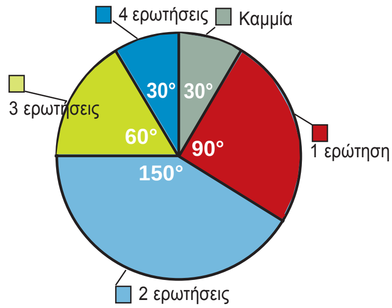
3 Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μιας βιοτεχνίας το πρώτο δεκαήμερο του Μαρτίου είναι: 0, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 0, 1.
α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να παρασταθούν τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.
γ) Να παρασταθεί η κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

4 Τα αποτελέσματα που πέτυχε μια ομάδα ποδοσφαίρου σε 34 αγώνες ήταν:
Η, Η, Ι, Ν, Ι, Ι, Ι, Ι, Ν, Η, Ι, Η, Η, Ι, Ν, Ι, Η, Ν, Ι, Ι, Ι, Ν, Η, Η, Ι, Ι, Ι, Ι, Ι, Ι, Ν, Ι, Ν, Ν.
(Η = Ήττα, Ν = Νίκη, Ι = Ισοπαλία)
α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να παρασταθεί η κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.

5 Ο αριθμός των μηνυμάτων που έστειλε ανά ημέρα τον Ιούλιο ο Τάκης, είναι:
4, 5, 2, 1, 5, 4, 0, 4, 7, 3, 5, 2, 2, 6, 5, 3, 2, 3, 1, 7, 6, 4, 5, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 5, 2.
α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να βρείτε πόσες ημέρες τα μηνύματα ήταν περισσότερα από 3.
γ) Να βρείτε το ποσοστό των ημερών στις οποίες τα μηνύματα ήταν το πολύ 3.
δ) Να παραστήσετε την κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

6 Σε μια έρευνα που έγινε σε 25 μαθητές ως προς την ομάδα αίματος, έγιναν οι παρατηρήσεις:
Ο, Α, Α, Α, Ο, ΑΒ, Α, Β, Α, ΑΒ, Β, Ο, Α, Ο, Β, Β, Β, Α, Α, ΑΒ, Β, Ο, Α, Α, Α.
α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.
β) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν ομάδα Α ή Β;
γ) Ποια ομάδα αίματος εμφανίζεται λιγότερο στο δείγμα;

7 Σε ένα διαγώνισμα με τέσσερις ερωτήσεις ο αριθμός των σωστών απαντήσεων φαίνεται στο κυκλικό διάγραμμα.



α) Να γίνει ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων.
β) Αν κάθε σωστή ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες, να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία μικρότερη ή ίση του 10.

8 Στο εικονόγραμμα δίνεται ο αριθμός των υπολογιστών που πούλησε μια εταιρεία το έτος 2003 για 4 μάρκες Α, Β, Γ, Δ.
α) Πόσους συνολικά υπολογιστές πούλησε η εταιρεία;
β) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων.
γ) Ποιο είναι το ποσοστό των υπολογιστών που δεν είναι μάρκας Α ή Β;

4.4. Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Εξετάσαμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου ως προς το βάρος τους. Τα αποτελέσματα (στρογγυλοποιημένα σε κιλά) είναι:

53	59	46	61	47	64	47	72	53	58	55	67	57	59	53	66
52	41	57	65	75	60	71	42	62	49	63	52	43	49	57	62
55	81	54	55	42	52	68	54	67	43	42	60	56	59	47	78
59	63	54	48	56	60	44	53	59	50	55	46	56	47	53	62
57	46	63	61	55	69	51	54	61	51	61	41	58	53	73	56

*Επειδή οι διαφορετικές τιμές που βρήκαμε είναι πάρα πολλές (από 41 έως 81 κιλά) και ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων που πρέπει να κατασκευάσουμε είναι πολύ μεγάλος, χωρίζουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις σε «ομάδες» που λέγονται «**κλάσεις**», ως εξής:*
Στην 1η κλάση τοποθετούμε όσους μαθητές ζυγίζουν 40 – 46 κιλά, στη 2η όσους ζυγίζουν 46 – 52, στην 3η 52 – 58, στην 4η 58 – 64, στην 5η 64 – 70, στην 6η 70 – 76 και στην 7η 76 – 82 κιλά. (Αν κάποια παρατήρηση συμπίπτει με το δεξιό άκρο μιας κλάσης, την τοποθετούμε στην αμέσως επόμενη κλάση). Να κάνετε διαλογή των παραπάνω παρατηρήσεων και να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

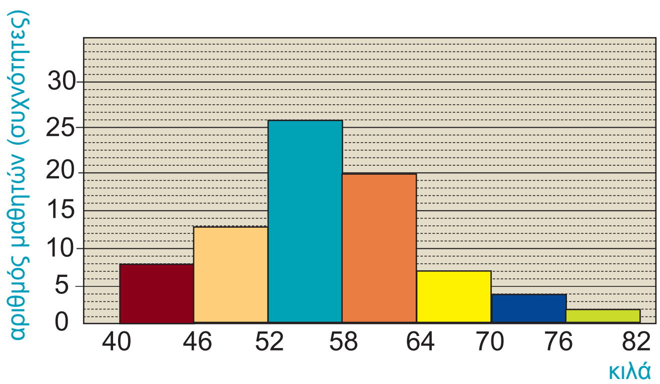
Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Κλάσεις	Διαλογή	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
40 – 46	~~IIII~~ III	8	10 %
46 – 52	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13	16,25 %
52 – 58	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	26	32,50 %
58 – 64	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	20	25 %
64 – 70	~~IIII~~ II	7	8,75 %
70 – 76	IIII	4	5 %
76 – 82	II	2	2,50 %
	Σύνολα	**80**	**100%**

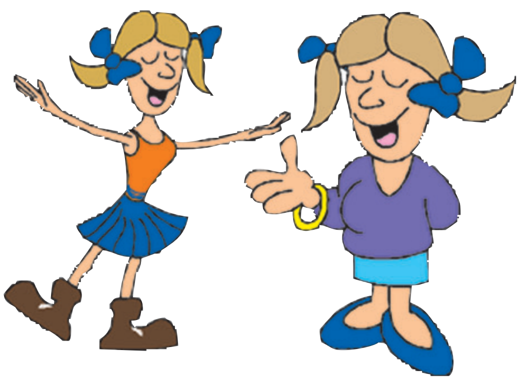
Η διαδικασία, που είδαμε στην προηγούμενη δραστηριότητα, ονομάζεται **ομαδοποίηση των παρατηρήσεων**. Χωρίσαμε, δηλαδή, το διάστημα από 40 κιλά έως 81 κιλά, στο οποίο ανήκουν οι παρατηρήσεις, σε υποδιαστήματα. Τα υποδιαστήματα αυτά λέγονται **κλάσεις.** Στη δραστηριότητα θεωρήσαμε κλάσεις **πλάτους** 6 κιλών.

Γραφική παρουσίαση ομαδοποιημένων παρατηρήσεων



Μια ομαδοποιημένη κατανομή παριστάνεται με **ιστόγραμμα**, που αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια, τα οποία έχουν ύψος ίσο με τη συχνότητα ή τη σχετική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

Έτσι, το ορθογώνιο της κλάσης 40 – 46 έχει ύψος 8. Οι αριθμοί 40 και 46 λέγονται **άκρα** της κλάσης. Επίσης, ο αριθμός 43 $\left(\text{δηλαδή } \frac{40+46}{2}=\frac{86}{2}=43\right)$ λέγεται **κέντρο** της κλάσης 40 – 46.



Παρατήρηση:

Από τη στιγμή που έχουμε κάνει ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, οι συχνότητες και οι σχετικές συχνότητες που έχουμε βρει στον παραπάνω πίνακα κατανομής συχνοτήτων, δεν αναφέρονται σε μεμονωμένους αριθμούς, αλλά στις κλάσεις. Έτσι, λέμε ότι η κλάση 58 – 64 έχει συχνότητα 20 και σχετική συχνότητα 25% χωρίς να γνωρίζουμε τη συχνότητα καθεμιάς από τις τιμές 58, 59, 60,...,63 που ανήκουν στην κλάση αυτή. Έτσι, θεωρούμε ότι 20 μαθητές που έχουν βάρος 58 – 64 κιλά αντιπροσωπεύονται από το κέντρο της κλάσης, δηλαδή τον αριθμό

$$\frac{58+64}{2}=\frac{122}{2}=61 \text{ κιλά.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε μια εθνική οδό η Τροχαία έλεγξε 50 αυτοκίνητα ως προς την ταχύτητα που είχαν αναπτύξει. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

α) Να κατασκευάσετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων και ιστόγραμμα συχνοτήτων.

β) Αν το όριο ταχύτητας στο συγκεκριμένο σημείο της Εθνικής οδού είναι 120 km/h, τι ποσοστό των οδηγών παρανόμησε; (Θεωρούμε ότι παρανόμησαν ακόμα και οι οδηγοί που έτρεχαν με 120 km/h).

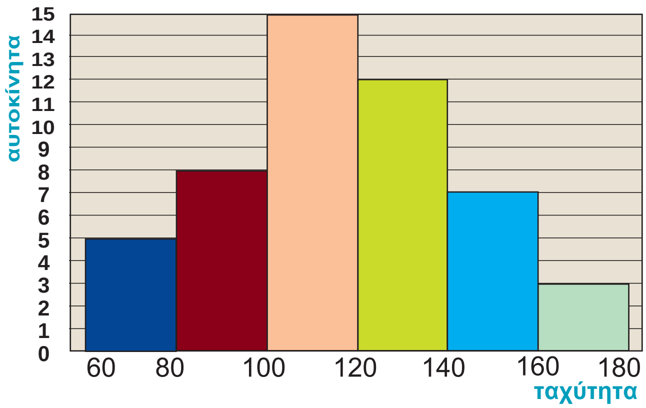
Ταχύτητα σε km/h	Αυτοκίνητα
60–80	5
80–100	8
100–120	15
120–140	12
140–160	7
160–180	3
Σύνολο	**50**

Λύση: α) Η συχνότητα της κλάσης 60 − 80 είναι 5, οπότε η σχετική συχνότητα της κλάσης αυτής είναι:

$\frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0{,}10$ ή 10%.

Ομοίως, βρίσκουμε και τις υπόλοιπες σχετικές συχνότητες. Χρησιμοποιώντας τις συχνότητες της 2ης στήλης του διπλανού πίνακα κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Κλάσεις	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες
60–80	5	10 %
80–100	8	16 %
100–120	15	30 %
120–140	12	24 %
140–160	7	14 %
160–180	3	6 %



β) Παρανόμησαν όσοι οδηγοί ανήκουν στις τρεις τελευταίες κλάσεις, δηλαδή 12+7+3=22 οδηγοί, δηλαδή ποσοστό

$\frac{22}{50} = \frac{44}{100} = 0{,}44$ ή 44%.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνονται τα ομαδοποιημένα δεδομένα του παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20
Συχνότητες	3	5	8	4

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

		Α	Β	Γ	Δ
1	Το πλάτος της κάθε κλάσης είναι:	4	5	2	20
2	Το κέντρο της κλάσης 5 – 10 είναι:	5	15	7,5	10
3	Η συχνότητα της κλάσης 5 – 10 είναι:	$\frac{8}{5}$	8	$\frac{8}{20}$	5

2. Δίνονται οι βαθμοί που πήραν 20 μαθητές σ' ένα διαγώνισμα:

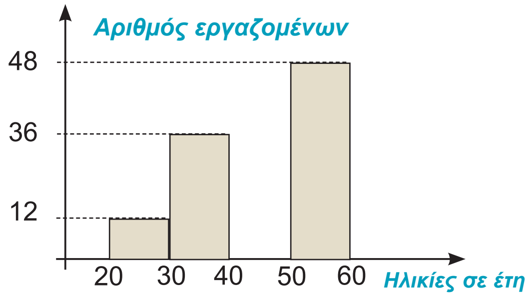
18	16	12	6	10
11	7	13	4	18
12	15	3	10	8
18	7	14	14	11

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20
Συχνότητες					
Σχετικές συχνότητες					

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο παρακάτω ιστόγραμμα δίνονται οι ηλικίες 120 ατόμων που εργάζονται σ' ένα υπουργείο. Τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Το ορθογώνιο της κλάσης 40 – 50 δεν είναι συμπληρωμένο.



α) Να βρείτε τις συχνότητες των κλάσεων.
β) Να συμπληρώσετε το ιστόγραμμα.

2 Σε μια έρευνα ρωτήθηκαν 50 άτομα για τον αριθμό των ημερών που ξεκουράστηκαν τον τελευταίο μήνα. Προέκυψαν οι παρατηρήσεις

2	3	1	2	6	1	1	2	0	5	4	7	2	4	7	1	2
5	2	0	1	4	6	0	3	6	2	4	6	9	4	4	3	4
8	5	6	2	4	4	3	8	4	3	8	3	3	5	6	4	

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.
β) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

3 Η βαθμολογία 30 μαθητών σ' ένα διαγώνισμα στο κεφάλαιο της Στατιστικής είναι:

18	10	19	4	1	12	14	10	4	10	19	12	6	12	14
14	12	14	4	14	12	14	19	8	16	18	6	16	18	18

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.
β) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

4 Ο αριθμός των τροχαίων παραβάσεων στην Εθνική Οδό, που έγινε κατά τη διάρκεια ενός μήνα ανά ημέρα, ήταν:

261	211	223	282	272	211
233	267	247	243	207	221
294	201	249	214	242	211
262	285	298	272	214	232
215	272	245	241	263	242

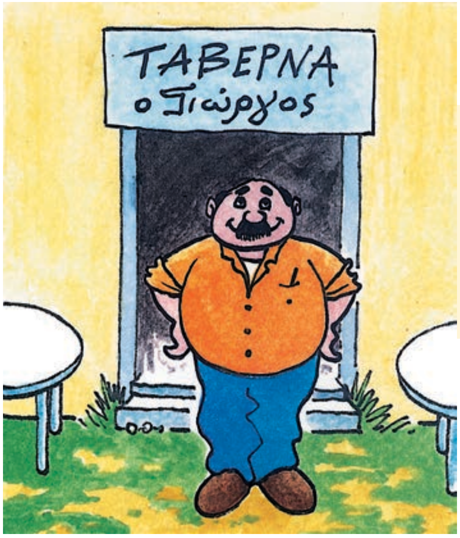
α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

5 Από μία έρευνα που έγινε σε 80 εργαζόμενους μιας επιχείρησης για το πόσες ημέρες ήταν άρρωστοι τον περασμένο χρόνο, βρέθηκαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ημέρες ασθένειας	0–10	10–20	20–30	30–40
ποσοστό	35%	40%	15%	10%

Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

4.5. Μέση τιμή - Διάμεσος



Μέση τιμή

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Γιώργος έχει μια ταβέρνα σ' ένα μικρό νησί του Αιγαίου. Τα κέρδη του, σε €, για το προηγούμενο έτος ήταν ανά μήνα:
0, 0, 100, 400, 1000, 1500, 2500, 5000, 1500, 250, 50, 0.
Τι μηνιαίο μισθό θα έπρεπε να παίρνει, αν ήταν υπάλληλος, ώστε να είχε το ίδιο ετήσιο εισόδημα;

Λύση

Ας εξετάσουμε πρώτα πόσα χρήματα κέρδισε ο Γιώργος όλη τη χρονιά. Ο Γιώργος κέρδισε συνολικά
0 + 0 + 100 + 400 + 1000 + 1500 + 2500 + 5000 + 1500 + 250 + 50 + 0 = 12.300 €.

Αν το ποσό αυτό μοιραστεί εξίσου σε όλους τους μήνες, θα κέρδιζε $\frac{12.300}{12} = 1025$ € κάθε μήνα.

Θα λέμε ότι ο **μέσος όρος** ή η **μέση τιμή** των κερδών του Γιώργου είναι 1025 €.

Για να βρούμε τη **μέση τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων, **προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών**.

Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\textbf{Μέση τιμή} = \frac{\textbf{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\textbf{πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Διάμεσος

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Οι μηνιαίες αποδοχές εννέα εργαζομένων μιας επιχείρησης είναι (σε €):
700, 600, 2900, 950, 700, 800, 700, 2100, 900.
α) Να βρείτε τη μέση τιμή των αποδοχών των εργαζομένων.
β) Να βρείτε την τιμή που «προσεγγίζει» καλύτερα τις αποδοχές των περισσότερων εργαζομένων.

Λύση

α) Η μέση τιμή των αποδοχών είναι:

$$\frac{700 + 600 + 2900 + 950 + 700 + 800 + 700 + 2100 + 900}{9} = \frac{10350}{9} = 1150 \text{ €}$$

β) Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι εργαζόμενοι (7 στους 9) έχουν αποδοχές μικρότερες (κάτω από 1000 €) από τη μέση τιμή που βρήκαμε (1150 €), ενώ μόνο δύο έχουν μεγαλύτερες αποδοχές (2100 και 2900 €). Αυτοί οι δύο μεγάλοι μισθοί φαίνεται ότι αυξάνουν τη μέση τιμή.
Τοποθετούμε κατά σειρά μεγέθους τις αποδοχές των 9 υπαλλήλων:

$$\underbrace{600 \quad 700 \quad 700 \quad 700}_{\text{4 παρατηρήσεις}} \quad \boxed{800} \quad \underbrace{900 \quad 950 \quad 2100 \quad 2900}_{\text{4 παρατηρήσεις}}$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή 800 € βρίσκεται ακριβώς στη μέση, γιατί υπάρχουν 4 παρατηρήσεις μικρότερες ή ίσες του 800 και 4 παρατηρήσεις μεγαλύτερες ή ίσες του 800. Η μεσαία αυτή παρατήρηση «προσεγγίζει» καλύτερα τις αποδοχές των περισσότερων εργαζομένων.

Η προηγούμενη δραστηριότητα παρουσιάζει ένα μέγεθος της Στατιστικής το οποίο ονομάζουμε **διάμεσο**.

Ένας εύκολος τρόπος για να βρίσκουμε τη διάμεσο είναι ο εξής:
Γράφουμε τις παρατηρήσεις με σειρά μεγέθους:

600 700 700 700 800 900 950 2100 2900

Στη συνέχεια, διαγράφουμε την πρώτη και την τελευταία παρατήρηση:

~~600~~ 700 700 700 800 900 950 2100 ~~2900~~

Μετά διαγράφουμε τη δεύτερη και την προτελευταία:

~~600~~ ~~700~~ 700 700 800 900 950 ~~2100~~ ~~2900~~

Και συνεχίζουμε έτσι μέχρι να μείνει μόνο μία παρατήρηση, που είναι η διάμεσος:

~~600~~ ~~700~~ ~~700~~ ~~700~~ $\boxed{800}$ ~~900~~ ~~950~~ ~~2100~~ ~~2900~~

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, παίρνουμε ως διάμεσο τη μεσαία παρατήρηση.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που μένουν δύο «μεσαίες» παρατηρήσεις.
Αν έχουμε τις παρατηρήσεις: 15, 11, 11, 12, 16, 17, 13, 14, 16, 19, τις τοποθετούμε με σειρά μεγέθους και διαγράφουμε διαδοχικά από τα άκρα, προς τα μέσα:

~~11~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ $\boxed{14 \quad 15}$ ~~16~~ ~~16~~ ~~17~~ ~~19~~

Παρατηρούμε ότι περισσεύουν δύο μεσαίες παρατηρήσεις: το 14 και το 15.
Αυτό οφείλεται στο ότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 10 (δηλαδή άρτιος αριθμός), οπότε δεν υπάρχει μεσαία παρατήρηση.
Σε αυτή την περίπτωση θα θεωρήσουμε ως διάμεσο τον αριθμό $\frac{14 + 15}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5$.

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, παίρνουμε ως διάμεσο τον μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής

Βαθμοί	Μαθητές (συχνότητες)
0–4	1
4–8	2
8–12	6
12–16	10
16–20	6
ΣΥΝΟΛΟ	**25**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Μετά το τέλος ενός διαγωνίσματος ο καθηγητής δίνει στον Γυμνασιάρχη τον διπλανό πίνακα με τους βαθμούς των μαθητών της τάξης. Πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον μέσο όρο των βαθμών όλης της τάξης;

Λύση

Είναι φανερό ότι δε μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη μέση τιμή των βαθμών, γιατί δε γνωρίζουμε τι βαθμό ακριβώς πήρε κάθε μαθητής. Γνωρίζουμε ότι 6 μαθητές πήραν βαθμό από 8 μέχρι 12, αλλά αγνοούμε τον ακριβή βαθμό του καθενός.
Θα βρούμε μία τιμή που προσεγγίζει τη μέση τιμή, δηλαδή θα κάνουμε μια **εκτίμηση** της μέσης τιμής.

Θεωρούμε ότι όλοι οι βαθμοί μιας κλάσης **αντιπροσωπεύονται από το κέντρο της κλάσης**. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι οι 6 μαθητές που έχουν πάρει βαθμούς από 8 μέχρι 12, έχουν όλοι τον ίδιο βαθμό, ίσο με το κέντρο της κλάσης, δηλαδή βαθμό $\frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

Ομοίως, θεωρούμε ότι οι 10 μαθητές που έχουν πάρει βαθμό από 12 έως 16, έχουν όλοι τον ίδιο βαθμό ίσο με:

$\frac{12+16}{2} = \frac{28}{2} = 14$ κ.ο.κ.

Κατασκευάζουμε, λοιπόν, τον διπλανό πίνακα:

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα	(Συχνότητα) · (κέντρο κλάσης)
0 – 4	2	1	2 · 1 = 2
4 – 8	6	2	6 · 2 = 12
8 – 12	10	6	10 · 6 = 60
12 – 16	14	10	14 · 10 = 140
16 – 20	18	6	18 · 6 = 108
ΣΥΝΟΛΑ		**25**	**322**

Στην περίπτωση αυτή, οι 25 μαθητές έχουν πάρει συνολικά 322 βαθμούς, οπότε η μέση τιμή των βαθμών είναι: $\frac{322}{25} = 12{,}88$.

Επομένως, για να βρούμε τη μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής:

- **Βρίσκουμε τα κέντρα των κλάσεων.**
- **Πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.**
- **Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.**
- **Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Η Έλενα εξετάστηκε πέντε φορές σ' αυτό το τρίμηνο στο μάθημα της Ιστορίας και πήρε τους βαθμούς: 16, 14, 18, 18 και 14. Τι βαθμό πρέπει να πάρει ως γενικό βαθμό τριμήνου;

Λύση: Η μέση τιμή των βαθμών της Έλενας είναι: $\frac{16+14+18+18+14}{5} = \frac{80}{5} = 16$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο διπλανός πίνακας δείχνει τον αριθμό των τερμάτων που πέτυχε μια ομάδα ποδοσφαίρου στους 15 πρώτους αγώνες πρωταθλήματος.

α) Πόσα τέρματα έχει πετύχει συνολικά η ομάδα αυτή και στους 15 αγώνες;

β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός τερμάτων που πετυχαίνει η ομάδα αυτή σε κάθε αγώνα;

Τέρματα	Αγώνες
0	1
1	4
2	3
3	5
4	2
ΣΥΝΟΛΟ	15

Λύση: α) Σε 1 αγώνα έχει πετύχει 0 τέρματα, άρα σύνολο $1 \cdot 0 = 0$.
Σε 4 αγώνες έχει πετύχει 1 τέρμα, άρα σύνολο $4 \cdot 1 = 4$.
Σε 3 αγώνες έχει πετύχει 2 τέρματα, άρα σύνολο $3 \cdot 2 = 6$.
Σε 5 αγώνες έχει πετύχει 3 τέρματα, άρα σύνολο $5 \cdot 3 = 15$.
Σε 2 αγώνες έχει πετύχει 4 τέρματα, άρα σύνολο $4 \cdot 2 = 8$.

Οπότε, συνολικά έχει πετύχει:
$1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 0 + 4 + 6 + 15 + 8 = 33$ τέρματα.

β) Αφού σε 15 αγώνες έχει πετύχει συνολικά 33 τέρματα, ο μέσος όρος για κάθε αγώνα είναι: $\dfrac{1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{15} = \dfrac{33}{15} = 2{,}2$ τέρματα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Σε μία τάξη υπάρχουν 8 μαθητές και 12 μαθήτριες. Το μέσο ύψος των 8 μαθητών είναι 168 cm και το μέσο ύψος των 12 μαθητριών είναι 162 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος όλων των μαθητών της τάξης;

Λύση: Το άθροισμα των υψών των 8 μαθητών (σε cm) είναι: $8 \cdot 168 = 1344$.
Το άθροισμα των υψών των 12 μαθητριών (σε cm) είναι: $12 \cdot 162 = 1944$.
Το άθροισμα των υψών και των 20 μαθητών (σε cm) είναι: $1344 + 1944 = 3288$.

Επομένως, το μέσο ύψος (σε cm) είναι: $\dfrac{3288}{20} = 164{,}4$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

α) 3 5 2 7 3 2 4 6 6 4 3

β) 12 15 14 17 13 18 15 16 13 17 12 11

Λύση: α) Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

2 2 3 3 3 4 4 5 6 6 7

Το πλήθος τους είναι 11 (περιττός). Διαγράφοντας τις ακραίες παρατηρήσεις ανά δύο:

$\cancel{2}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{3}$ $\cancel{3}$ $\boxed{4}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$

περισσεύει η 6η κατά σειρά παρατήρηση, η οποία ισούται με τη διάμεσο.

β) Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

11 12 12 13 13 14 15 15 16 17 17 18

Το πλήθος τους είναι 12 (άρτιος). Διαγράφοντας τις ακραίες παρατηρήσεις ανά δύο:

$1\cancel{1}$ $1\cancel{2}$ $1\cancel{2}$ $1\cancel{3}$ $1\cancel{3}$ $\boxed{14 \quad 15}$ $1\cancel{5}$ $1\cancel{6}$ $1\cancel{7}$ $1\cancel{7}$ $1\cancel{8}$

περισσεύουν δύο παρατηρήσεις: η 6η (14) και η 7η (15).

Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος αυτών των δύο παρατηρήσεων, δηλαδή ο αριθμός: $\frac{14+15}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:
Το άθροισμα 50 παρατηρήσεων είναι 100. Η μέση τιμή είναι:
Α: 500 Β: 5 Γ: $\frac{1}{2}$ Δ: 2

2. Η μέση τιμή 100 παρατηρήσεων είναι 28,2. Το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι:
Α: 2,82 Β: 282 Γ: 2820 Δ: 0,282

3. Η μέση τιμή μιας κατανομής είναι 3 και το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι 60. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι:
Α: 5 Β: 20 Γ: 180 Δ: $\frac{3}{60}$

4. Από τις παρακάτω παρατηρήσεις, που είναι τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά μεγέθους, λείπει η 5η κατά σειρά παρατήρηση
2 3 5 7 .... 14 14 15
α) Αν η διάμεσος είναι 7, η παρατήρηση που λείπει είναι: Α: 7 Β: 8 Γ: 9 Δ: 10
β) Αν η διάμεσος είναι 8, η παρατήρηση που λείπει είναι: Α: 7 Β: 8 Γ: 9 Δ: 10
γ) Αν η διάμεσος είναι 8,5, η παρατήρηση που λείπει είναι: Α: 7 Β: 8 Γ: 9 Δ: 10

5. Δίνεται η κατανομή συχνοτήτων του διπλανού πίνακα.
Η μέση τιμή είναι ίση με:

Α: $\frac{10+20+30}{3}$ Β: $\frac{10\cdot 2+20\cdot 3+30\cdot 4}{3}$

Γ: $\frac{10+20+30}{9}$ Δ: $\frac{10\cdot 2+20\cdot 3+30\cdot 4}{9}$

Τιμές	Συχνότητες
10	2
20	3
30	4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογιστεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων κάθε γραμμής.
α) 7 7 7 7 7 7
β) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
γ) –3 –2 –2 0 1 1 1
δ) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$

2 Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε γραμμής:
α) 4 3 2 1 –1 –2
β) 2 2 4 2 3 3 1
γ) 100 101 99 98 101 102 103
δ) –5 –2 0 1 3 –4

3 Η βαθμολογία σε 14 μαθήματα του πρώτου τετραμήνου δύο μαθητών της Β' Γυμνασίου είναι:

Α μαθητής

18	17	16	19	20	16	17	19	18	18	19	18	19	17

Β μαθητής

19	19	18	18	19	20	18	17	19	19	18	19	18	20

α) Να βρείτε τον μέσο όρο της βαθμολογίας κάθε μαθητή.
β) Να εκτιμήσετε ποιος μαθητής έχει καλύτερη επίδοση.
γ) Να βρείτε τη διάμεσο της βαθμολογίας κάθε μαθητή.

4 Το ύψος των 12 παικτών της ομάδας μπάσκετ της ΑΕΚ είναι σε cm:
192, 197, 197, 198, 198, 200, 200, 201, 201, 204, 205, 206.
α) Να βρείτε το μέσο ύψος της ομάδας.
β) Να βρείτε τη διάμεσο των υψών της ομάδας.
γ) Αν ο παίκτης με ύψος 192 cm αντικατασταθεί από άλλον ύψους 200 cm, ποιο είναι το νέο μέσο ύψος της ομάδας;

5 Η θερμοκρασία το μεσημέρι κάθε ημέρας του Νοεμβρίου στον Άλιμο είναι:

10	14	12	16	10	14	18	16	17	14
16	12	17	10	12	14	14	16	12	14
18	14	10	14	16	10	18	12	16	14

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία και τη διάμεσο των θερμοκρασιών.

6 Σε μία πόλη 200 παιδιά παρουσιάζουν αλλεργική αντίδραση σ' ένα φάρμακο, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Ηλικία παιδιών	Συχνότητα
0 – 2	50
2 – 4	40
4 – 6	60
6 – 8	30
8 – 10	10
10 – 12	10

α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων της κατανομής.
β) Να βρείτε τη μέση ηλικία των παιδιών.

7 Οι ηλικίες ενός δείγματος 200 φιλάθλων που παρακολουθούν έναν αγώνα τένις είναι:

Ηλικία	Συχνότητα
9–15	24
15–21	48
21–27	56
27–33	36
33–39	24
39–45	12
ΣΥΝΟΛΟ	200

Να βρείτε τη μέση τιμή της ηλικίας των φιλάθλων.

8 Μια ένωση καταναλωτών κατέγραψε την τιμή πώλησης ενός προϊόντος (σε €) σε 20 διαφορετικά σημεία πώλησης:

50	47	51	45	54	49	46	52	48	50
51	49	52	49	47	50	54	52	49	53

α) i) Να τοποθετήσετε τα δεδομένα αυτά σε πίνακα συχνοτήτων.
ii) Να βρείτε τη μέση τιμή πώλησης Μ του προϊόντος.
β) i) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Συχνότητες
45 – 47	
47 – 49	
...	
...	
...	

ii) Να βρείτε τη μέση τιμή πώλησης Μ′ των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων του πίνακα αυτού.
iii) Ποια είναι η πραγματική μέση τιμή (Μ ή Μ′);

Επανάληψη Κεφαλαίου 4

Περιγραφική Στατιστική

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

Ένα σύνολο του οποίου μελετάμε τα στοιχεία ως προς τουλάχιστον ένα χαρακτηριστικό λέγεται **πληθυσμός**.

Επειδή η έρευνα ολόκληρου του πληθυσμού δεν είναι πάντοτε εφικτή, καταφεύγουμε στη **δειγματοληψία**. Επιλέγουμε, δηλαδή, ένα **αντικειμενικό** δείγμα από το οποίο μπορούμε να βγάλουμε αξιόπιστα συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.

ΠΙΝΑΚΕΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων γίνεται με **πίνακες** και **διαγράμματα**.

Υπάρχουν διαφόρων μορφών διαγράμματα, όπως το **εικονόγραμμα**, το **ραβδόγραμμα**, το **κυκλικό διάγραμμα** και το **χρονόγραμμα**.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Συχνότητα μιας τιμής λέγεται ο αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται στο δείγμα η τιμή αυτή.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Η **σχετική συχνότητα** μιας τιμής **είναι το πηλίκο** της συχνότητας της τιμής αυτής με το πλήθος όλων των παρατηρήσεων, και εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό.

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ

Όταν κάνουμε **ομαδοποίηση** των παρατηρήσεων, χωρίζουμε τις παρατηρήσεις σε **ομάδες** ή **κλάσεις** και παρουσιάζουμε την κατανομή με **ιστόγραμμα** συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Για να βρούμε τη **μέση τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων, **προσθέτουμε** όλες τις παρατηρήσεις **και διαιρούμε** με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Για να βρούμε τη **διάμεσο** μιας κατανομής, γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά και βρίσκουμε τη μεσαία παρατήρηση. Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, παίρνουμε ως διάμεσο τον μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

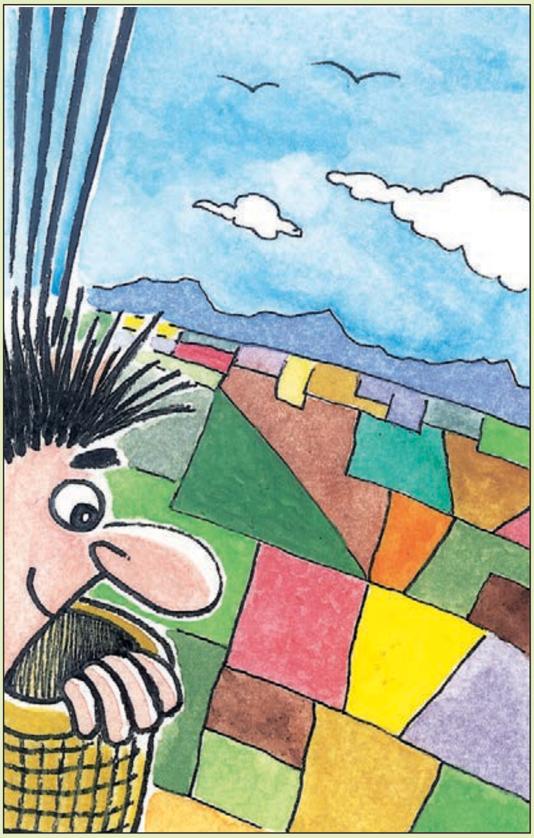
ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Για να βρούμε τη μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής:

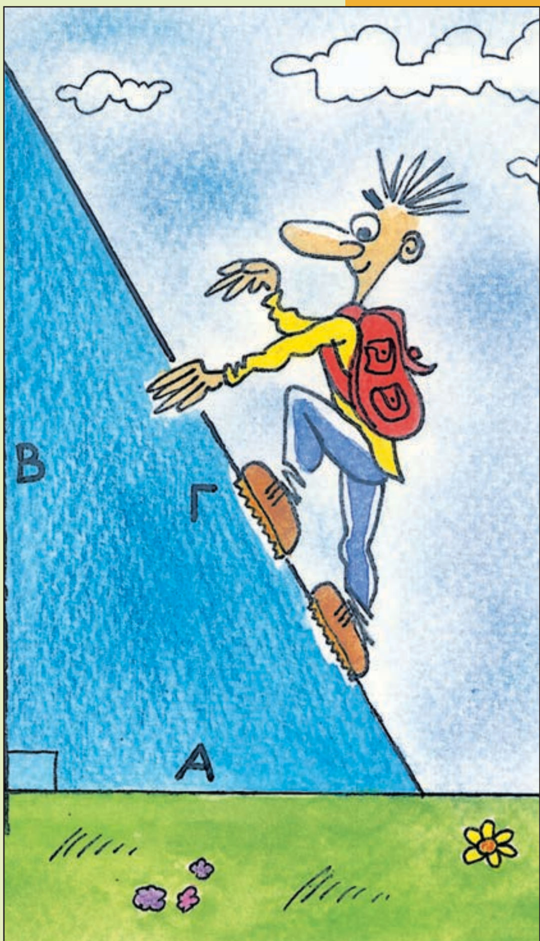
- Βρίσκουμε τα **κέντρα των κλάσεων**.
- **Πολλαπλασιάζουμε** το κέντρο κάθε κλάσης με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.
- **Προσθέτουμε** όλα τα γινόμενα.
- **Διαιρούμε** το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων



Πυθαγόρειο Θεώρημα



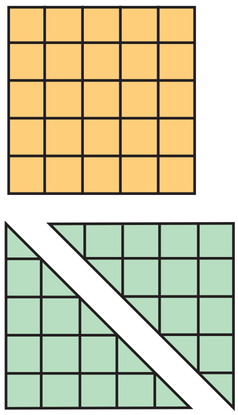
Εισαγωγικο Σημειωμα

Οι πλημμύρες του Νείλου, του Τίγρη και του Ευφράτη, πριν από περίπου τρεις χιλιετίες, ανάγκασαν τους λαούς που κατοικούσαν στην περιοχή να αναπτύξουν την «τέχνη» της μέτρησης της γης (Γεω-μετρία).

Τότε αναπτύχθηκε η έννοια του εμβαδού, την οποία θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο αυτό. Θα μάθουμε τις βασικές μονάδες μέτρησης εμβαδών, καθώς και τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού: τετραγώνου, ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.

Στο τέλος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και θα εξετάσουμε αρκετές εφαρμογές του.

1.1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

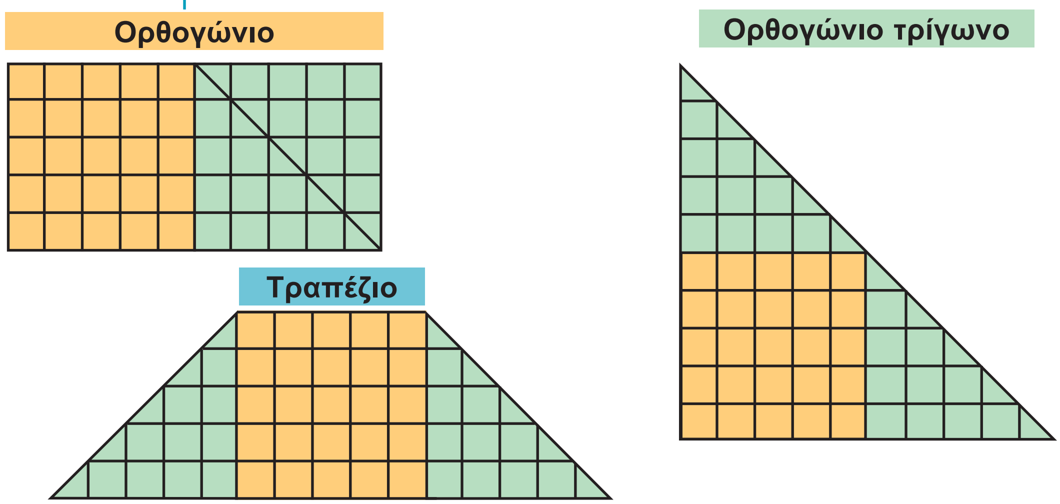
Δίνονται δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές 5 cm και ένα τετράγωνο πλευράς 5 cm.

α) Μπορείτε χρησιμοποιώντας τα τρία αυτά σχήματα να κατασκευάσετε:
- *i) Ένα ορθογώνιο πλάτους 10 cm και ύψους 5 cm;*
- *ii) Ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι 10 cm;*
- *iii) Ένα ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις 5 cm και 15 cm;*

β) Τι έκταση καταλαμβάνουν τα παραπάνω σχήματα στο επίπεδο, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης το τετραγωνάκι □ πλευράς 1 cm;

Λύση

α) Έχουμε τα παρακάτω σχήματα:



β) Μετρώντας τα τετραγωνάκια πλευράς 1 cm βρίσκουμε ότι το ορθογώνιο καταλαμβάνει έκταση 50, το τραπέζιο 50 και το ορθογώνιο τρίγωνο πάλι 50. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα τρία νέα σχήματα που προκύπτουν, παρόλο που είναι διαφορετικά μεταξύ τους, καταλαμβάνουν την ίδια έκταση στο επίπεδο, γιατί αποτελούνται ακριβώς από τα ίδια στοιχεία: το τετράγωνο και τα δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα. Για να δηλώσουμε ότι τα τρία αυτά σχήματα που κατασκευάσαμε, καταλαμβάνουν την ίδια έκταση στο επίπεδο, λέμε ότι έχουν το ίδιο **εμβαδόν**.

Για να μετρήσουμε το εμβαδόν, πρέπει πρώτα να επιλέξουμε μία μονάδα μέτρησης.

Αν, αρχικά, επιλέξουμε ως μονάδα μέτρησης το ένα από τα δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, τότε τα τρία νέα σχήματα έχουν εμβαδόν 4.

Αν επιλέξουμε ως μονάδα μέτρησης το τετραγωνάκι πλευράς 1 cm, τότε, όπως είδαμε, θα έχουν εμβαδόν 50.

Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

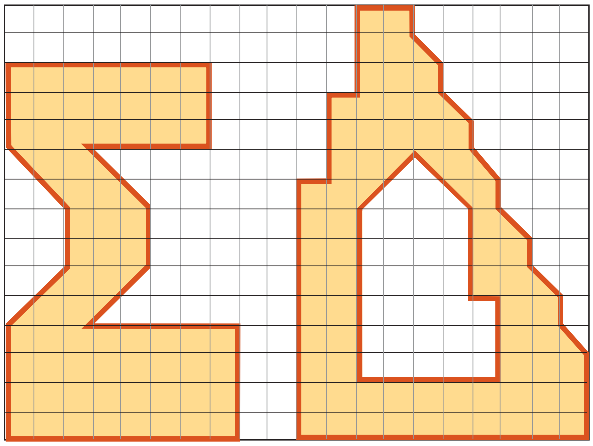
Να υπολογίσετε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού: α) □ β) ◺ γ) □□

Λύση: α) Μετρώντας τα τετραγωνάκια □ που υπάρχουν μέσα σε κάθε σχήμα παρατηρούμε ότι είναι 71. Άρα Ε = 71.

β) Αφού κάθε τριγωνάκι ◺ έχει το μισό εμβαδόν από κάθε τετραγωνάκι □, τα δύο εμβαδά με μονάδα μέτρησης το ◺ θα είναι $2 \cdot 71 = 142$. Άρα Ε = 142.

γ) Αφού κάθε □□ έχει το διπλάσιο εμβαδόν από κάθε τετραγωνάκι □, τα δύο εμβαδά με μονάδα μέτρησης το □□ θα είναι $\frac{71}{2} = 35{,}5$.

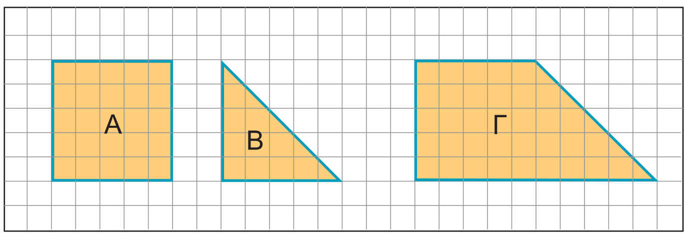
Άρα Ε = 35,5.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

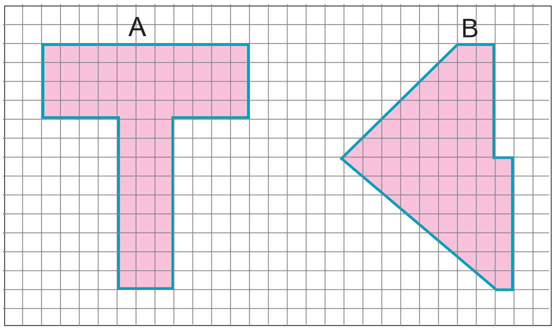
Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων Α, Β, Γ χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδών το □. Τι παρατηρείτε;

Λύση: Βρίσκουμε ότι τα εμβαδά των Α, Β, Γ είναι Α: 25, Β: 12,5, Γ: 37,5. Επομένως, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του Γ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών Α και Β, κάτι που γίνεται φανερό αν «ενώσουμε» κατάλληλα τα σχήματα Α και Β.

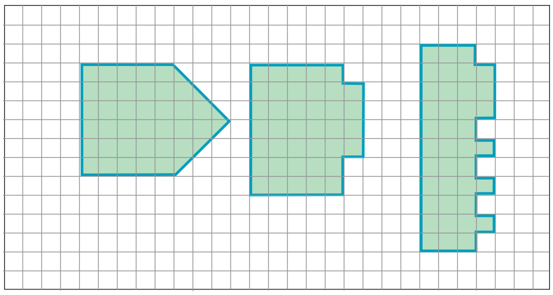


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

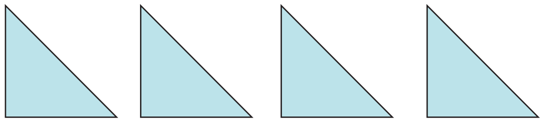
1 Ποιο από τα δύο σχήματα Α, Β έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



2 Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας ως μονάδα εμβαδού το ■.
Τι παρατηρείτε;

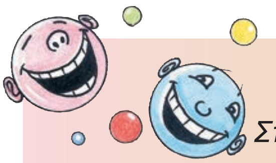


3 Δίνονται τέσσερα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με ίσες κάθετες πλευρές:



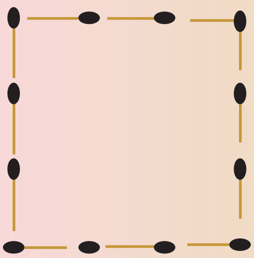
α) Χρησιμοποιώντας μόνο τα δύο τρίγωνα να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο.

β) Χρησιμοποιώντας και τα 4 τρίγωνα, (μια φορά το καθένα) να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο και ένα τραπέζιο.

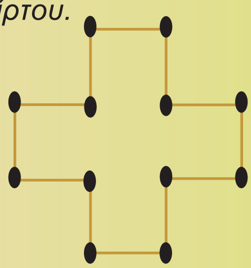


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο παρακάτω σχήμα χρησιμοποιήσαμε 12 σπίρτα για να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 9 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου!

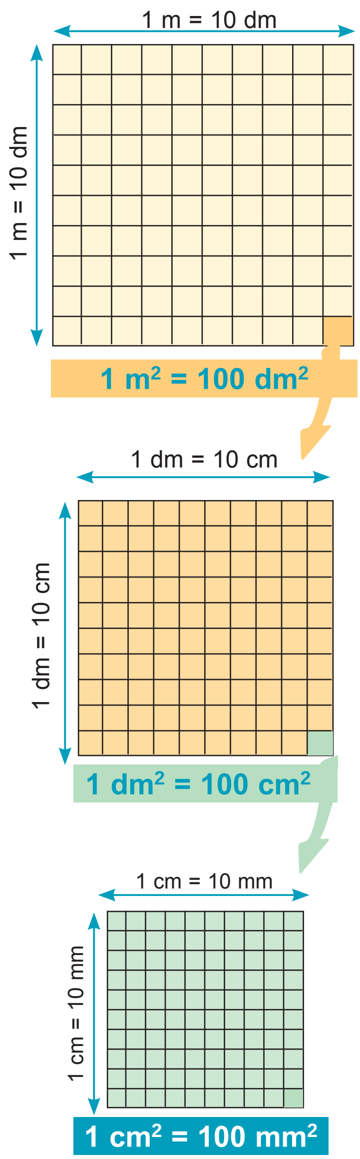


Αν τοποθετήσουμε, όμως, με διαφορετικό τρόπο τα 12 αυτά σπίρτα, μπορούμε να σχηματίσουμε σχήματα με άλλο εμβαδόν.
Για παράδειγμα, το παρακάτω σχήμα (σταυρός) έχει εμβαδόν ίσο με 5 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου.



Μπορείτε να τοποθετήσετε με άλλο τρόπο τα 12 αυτά σπίρτα, ώστε να προκύψουν σχήματα με εμβαδά 8, 7, 6, 4, 3 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου;

1.2. Μονάδες μέτρησης επιφανειών



- Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1 m. Το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού λέγεται τετραγωνικό μέτρο (1 m^2) και το χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης εμβαδών.
- Αφού 1 m = 10 dm, το τετραγωνικό μέτρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 dm. Το εμβαδόν σε κάθε τετραγωνάκι ονομάζεται τετραγωνικό δεκατόμετρο ή τετραγωνική παλάμη (1 dm^2).
  Παρατηρούμε ότι 1 m^2 = 100 dm^2.
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τετράγωνο πλευράς 1 dm.
  Αφού 1 dm = 10 cm, το τετραγωνικό δεκατόμετρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 cm. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 cm λέγεται τετραγωνικό εκατοστόμετρο ή τετραγωνικός πόντος (1 cm^2).
  Παρατηρούμε ότι 1 dm^2 = 100 cm^2.
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τετράγωνο πλευράς 1 cm.
  Αφού 1 cm = 10 mm, το τετραγωνικό εκατοστόμετρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 mm. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 mm λέγεται τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (1 mm^2).
  Παρατηρούμε ότι 1 cm^2 = 100 mm^2.
- Άλλες μονάδες μέτρησης εμβαδών είναι:
  – Το τετραγωνικό χιλιόμετρο (1 km^2), το οποίο ισούται με το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς 1000 m.
    Επομένως 1 km^2 = $1000 \cdot 1000$ = 1.000.000 m^2.
    Χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση μεγάλων εκτάσεων, όπως είναι η έκταση που καταλαμβάνει ένα κράτος, ένας νομός ή ένα νησί.
  – Το στρέμμα, το οποίο ισούται με 1000 m^2 και χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση των εμβαδών οικοπέδων και κτημάτων.

❖ Συνοψίζοντας τα παραπάνω σχηματίζουμε τον πίνακα:

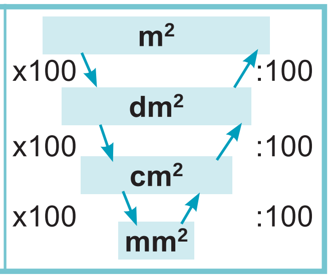
1 m^2 =	100 dm^2 =	10.000 cm^2 =	1.000.000 mm^2
	1 dm^2 =	100 cm^2 =	10.000 mm^2
		1 cm^2 =	100 mm^2

1 mm^2 =	0,01 cm^2 =	0,0001 dm^2 =	0,000001 m^2
	1 cm^2 =	0,01 dm^2 =	0,0001 m^2
		1 dm^2 =	0,01 m^2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Με τη βοήθεια του σχήματος μετατροπής μονάδων εμβαδού, να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253			
	320		
		7122	
			12653



Λύση: Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, για να μετατρέψουμε ένα εμβαδόν στην αμέσως μικρότερη μονάδα, πολλαπλασιάζουμε με το 100, ενώ για να το μετατρέψουμε στην αμέσως μεγαλύτερη μονάδα, διαιρούμε με το 100. Επομένως:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253	25300	2530000	253000000
3,20	320	32000	3200000
0,7122	71,22	7122	712200
0,012653	1,2653	126,53	12653

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω εμβαδά:

α) 3,7 dm^2, 7 cm^2, 4,3 cm^2, 3,7 m^2.

β) 40 cm^2, 42 mm^2, 40 dm^2, 3 m^2.

γ) 1453 mm^2, 14,5 cm^2, 1,4 dm^2, 0,14 m^2.

Λύση: α) Μετατρέπουμε τα τέσσερα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης:
3,7 dm^2 = 370 cm^2, 3,7 m^2 = 37000 cm^2, οπότε:
4,3 cm^2 < 7 cm^2 < 3,7 dm^2 = 370 cm^2 < 3,7 m^2 = 37000 cm^2.

β) 42 mm^2 < 40 cm^2 = 4000 mm^2 < 40 dm^2 = 400000 mm^2 < 3 m^2 = 3000000 mm^2

γ) Αφού 14,5 cm^2 = 1450 mm^2, 1,4 dm^2 = 14000 mm^2 και 0,14 m^2 = 140000mm^2, έχουμε ότι: 14,5 cm^2 < 1453 mm^2 < 1,4 dm^2 < 0,14 m^2.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ	Δ
1	6,2 m^2 =	62 cm^2	620 cm^2	62000 cm^2	0,62 cm^2
2	6,2 mm^2 =	62 cm^2	620 cm^2	0,62 cm^2	0,062 cm^2
3	6,2 cm^2 =	62 m^2	0,62 m^2	620 m^2	0,00062 m^2
4	6,2 cm^2 =	620 mm^2	6200 mm^2	0,62 mm^2	0,00062 mm^2
5	6,2 m^2 =	62 dm^2	620 dm^2	62000 dm^2	0,062 dm^2
6	6,2 mm^2 =	0,0000062 m^2	0,00062 m^2	0,062 m^2	0,0062 m^2

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Για να μετατρέψουμε:

	Α	Β	Γ
1. m^2 σε dm^2	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10
2. dm^2 σε cm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 10
3. cm^2 σε mm^2	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10	πολ/με με 100
4. dm^2 σε m^2	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10
5. cm^2 σε dm^2	πολλαπλασιάζουμε με 10.000	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 100
6. mm^2 σε cm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 10
7. m^2 σε cm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 10.000	διαιρούμε με 10.000
8. m^2 σε mm^2	πολ/με με 1.000.000	διαιρούμε με 100.000	διαιρούμε με 1.000
9. cm^2 σε m^2	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10.000	πολ/με με 10.000
10. mm^2 σε dm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 10.000	διαιρούμε με 10.000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη:
32 cm^2, 312 cm^2, 127 km^2, 710 dm^2, 12720 mm^2, 212 dm^2, 1280 mm^2, 79 km^2.

2 Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
12 m^2, 175 dm^2, 456 m^2, 136 m^2, 3 km^2, 1750 mm^2, 256 km^2.

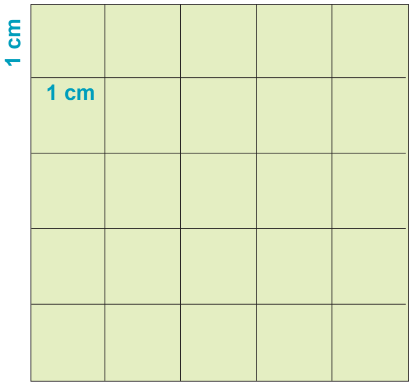
3 Να μετατρέψετε σε mm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
12 km^2, 431 m^2, 17 dm^2, 236 cm^2.

4 Να μετατρέψετε σε km^2 τα παρακάτω μεγέθη:
7233 mm^2, 4321 cm^2, 6322 dm^2, 14632 mm^2, 560 m^2.

5 Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τις κατατάξετε κατά σειρά μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.
α) 13850 mm^2, 0,23 m^2, 0,48 m^2, 670 cm^2, 13,7 dm^2.
β) 32 dm^2, 1,23 m^2, 23270 mm^2, 1356 cm^2.

6 Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν:
α) του δωματίου μας,
β) της Κρήτης,
γ) ενός αγρού,
δ) ενός γραμματόσημου,
ε) ενός φύλλου τετραδίου.

1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

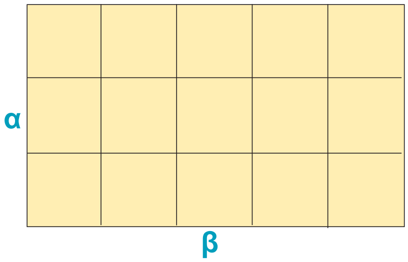


Εμβαδόν τετραγώνου

Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 5 cm. Μπορούμε να το χωρίσουμε σε $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 cm, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 cm^2. Άρα, το τετράγωνο έχει εμβαδόν 25 cm^2.

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α ισούται με $α^2$.



Εμβαδόν ορθογωνίου

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές 3 cm και 5 cm. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το ορθογώνιο χωρίζεται σε 15 «τετραγωνάκια» εμβαδού 1 cm^2. Επομένως, το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

Γενικά:

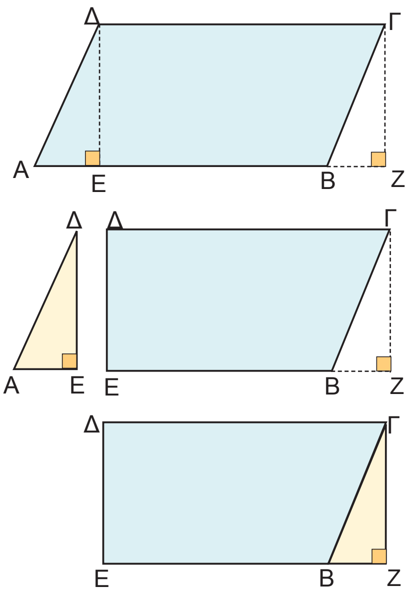
Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές α, β ισούται με $α \cdot β$.

Τις πλευρές ενός ορθογωνίου τις λέμε μήκος (τη μεγαλύτερη πλευρά) και πλάτος (τη μικρότερη) και τις ονομάζουμε διαστάσεις του ορθογωνίου. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το γινόμενο των διαστάσεων ενός ορθογωνίου ισούται με το εμβαδόν του ή:

εμβαδόν ορθογωνίου = μήκος · πλάτος.

Παρατήρηση:

Για να συμβολίσουμε το εμβαδόν κάθε επίπεδου σχήματος, το γράφουμε μέσα σε παρένθεση. Δηλαδή, το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ), το εμβαδόν ενός τριγώνου ΖΗΘ συμβολίζεται με (ΖΗΘ) κ.ο.κ.



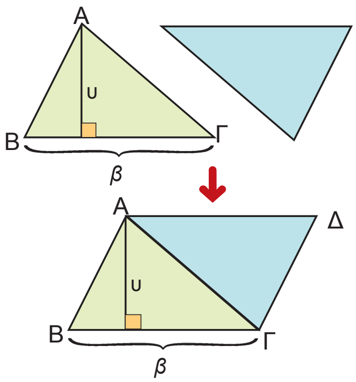
Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με βάση ΑΒ = β = ΓΔ και ας φέρουμε τα ύψη του ΔΕ = υ και ΓΖ = υ. Μεταφέροντας το τρίγωνο ΑΔΕ στη θέση τού (ίσου με αυτό) τριγώνου ΒΓΖ, παρατηρούμε ότι:
το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΕΖΓΔ.

Άρα: (ΑΒΓΔ) = (ΕΖΓΔ) = ΕΖ · ΓΖ = β · υ.
Γενικά:

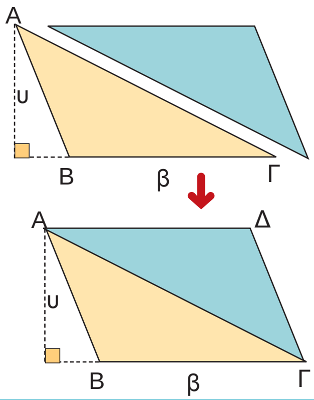
Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

Εμβαδόν τυχαίου τριγώνου



Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ που δεν είναι ορθογώνιο και ας πάρουμε και άλλο ένα τρίγωνο ίδιο με αυτό. Αν τοποθετήσουμε το δεύτερο τρίγωνο δίπλα στο πρώτο, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα, τότε θα σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, που θα έχει ως βάση β, τη βάση ΒΓ του ΑΒΓ και ως ύψος υ, το ύψος του ΑΒΓ, από την κορυφή Α.

Είτε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο είτε είναι αμβλυγώνιο, το εμβαδόν του θα είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που σχηματίζεται, αν τοποθετήσουμε άλλο ένα τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα.



Επομένως, θα ισχύει:

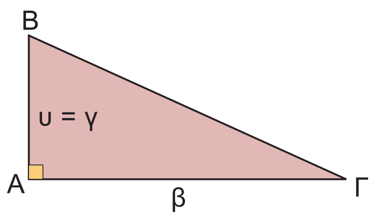
$$\textbf{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{2}\textbf{(ΑΒΓΔ)} = \frac{1}{2}\,\beta \cdot \upsilon,$$

όπου β η βάση του ΑΒΓ και υ το αντίστοιχο ύψος.

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου

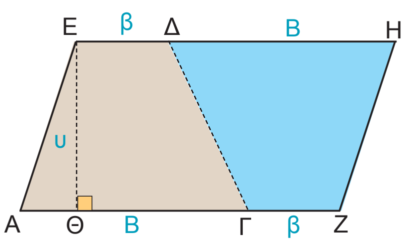


Όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, τότε η μία από τις κάθετες πλευρές είναι η βάση β και η άλλη το ύψος του.

Επομένως: $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma$.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.

Εμβαδόν τραπεζίου



Ας θεωρήσουμε το τραπέζιο ΑΓΔΕ που έχει μεγάλη βάση ΑΓ = Β, μικρή βάση ΕΔ = β και ύψος ΕΘ = υ.

Θεωρώντας άλλο ένα ίσο τραπέζιο με το ΑΓΔΕ σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΖΗΕ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το παραλληλόγραμμο που σχηματίσαμε έχει βάση (β + Β) και ύψος υ.

Επομένως: $(ΑΖΗΕ) = (\beta + Β) \cdot \upsilon$.

Όμως: $(ΑΖΗΕ) = 2(ΑΓΔΕ)$

Άρα: $(ΑΓΔΕ) = \dfrac{(\beta + Β)\upsilon}{2}$

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του με το ύψος του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα:

Μήκος ορθογωνίου	Πλάτος ορθογωνίου	Περίμετρος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου
12 m	**10 m**		
17 m		**44m**	
	9 m		**45 m²**
33 m			**330 m²**

Λύση: Με τη βοήθεια της σχέσης: εμβαδόν ορθογωνίου = μήκος · πλάτος, συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Μήκος ορθογωνίου	Πλάτος ορθογωνίου	Περίμετρος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου
12 m	**10 m**	44 m	120 m²
17 m	5 m	**44m**	85 m²
5 m	**9 m**	28 m	**45 m²**
33 m	10 m	86 m	**330 m²**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η αίθουσα Φυσικής στο σχολείο της Άννας αποφασίστηκε να στρωθεί με τετράγωνα πλακάκια που το καθένα έχει πλευρά 25 cm.

α) Να βρείτε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν, αν το δάπεδο της τάξης έχει διαστάσεις 12 m μήκος και 8 m πλάτος.

β) Αν κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, πόσα χρήματα θα χρειαστούν για να στρωθεί η τάξη;

Λύση: α) Το εμβαδόν του δαπέδου είναι: $E_{ΔΑΠ} = 12 \cdot 8 = 96$ (m²) και το εμβαδόν σε κάθε πλακάκι είναι: $E_{ΠΛΑΚ} = 25 \cdot 25 = 625$ (cm²) = 0,0625 (m²).

Διαιρώντας τα δύο αυτά εμβαδά βρίσκουμε πόσα πλακάκια χρειάζονται για να στρωθεί η τάξη:

$$\frac{E_{ΔΑΠ}}{E_{ΠΛΑΚ}} = \frac{96}{0{,}0625} = 1536.$$

β) Αφού χρειάζονται 1536 πλακάκια και το κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, το συνολικό κόστος θα είναι: $1536 \cdot 0{,}5 = 768$ €.

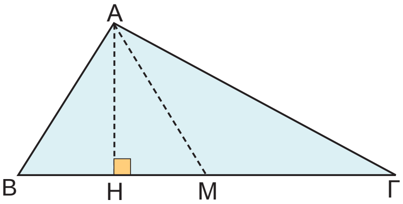
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο σχολείο της Κάτιας το μαθητικό συμβούλιο εκδίδει μια εφημερίδα που κάθε φύλλο της έχει διαστάσεις 42 cm μήκος και 30 cm πλάτος. Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα της εφημερίδας, αν κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα.

Λύση: Το εμβαδόν κάθε φύλλου είναι $30 \cdot 42 = 1260$ (cm²). Αφού κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα, χρειάζονται $8 \cdot 1260 = 10080$ (cm²) χαρτί για κάθε αντίτυπο.
Επομένως, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα, θα χρειαστούν:
$800 \cdot 10080 = 8064000$ (cm²) = 806,4 (m²) χαρτί.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ.
Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ έχουν το ίδιο εμβαδόν.



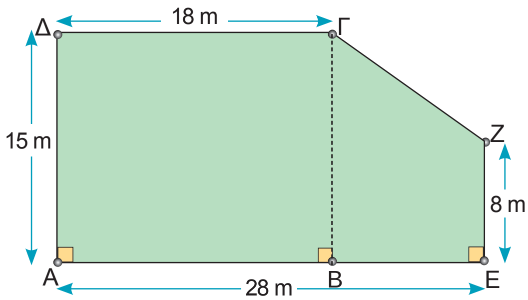
Λύση: Φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Τότε το τρίγωνο ΜΑΒ έχει εμβαδόν: $(\text{ΜΑΒ}) = \dfrac{\text{ΒΜ} \cdot \text{ΑΗ}}{2}$.

Το τρίγωνο ΜΑΓ έχει εμβαδόν: $(\text{ΜΑΓ}) = \dfrac{\text{ΜΓ} \cdot \text{ΑΗ}}{2}$. Όμως, ΜΒ = ΜΓ, επειδή το Μ είναι το μέσο της ΒΓ (η ΑΜ είναι διάμεσος). Άρα: (ΜΑΒ) = (ΜΑΓ).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Ένα οικόπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, πωλείται προς 300 € το m^2.
Ποια είναι η αξία του οικοπέδου;

Λύση: Βρίσκουμε πρώτα το εμβαδόν του οικοπέδου.
Αυτό αποτελείται από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το τραπέζιο ΒΕΖΓ.
Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:
$(\text{ΑΒΓΔ}) = 18 \cdot 15 = 270$ (m^2).
Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:
$(\text{ΒΕΖΓ}) = \dfrac{(15+8) \cdot 10}{2} = 115$ (m^2).



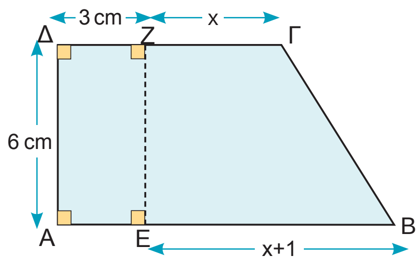
Άρα, το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 270 + 115 = 385 (m^2).
Για να βρούμε την αξία πώλησης του οικοπέδου, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν του με την τιμή πώλησης του τετραγωνικού μέτρου. Άρα, η αξία του οικοπέδου είναι:
$385 \cdot 300 = 115.500$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Στο παρακάτω σχήμα:
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x.
β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι το τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x.

Λύση: α) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μικρή βάση είναι ΔΓ = x + 3 (cm), η μεγάλη βάση είναι ΑΒ = x + 1 + 3 = x + 4 (cm) και το ύψος του είναι ΔΑ = 6 (cm). Άρα, το εμβαδόν του είναι: $(\text{ΑΒΓΔ}) = \dfrac{(\beta + \text{Β}) \cdot \upsilon}{2} = \dfrac{(x + 3 + x + 4) \cdot 6}{2} = 3(2x + 7)$ (cm^2).

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι
$(\text{ΑΕΖΔ}) = 3 \cdot 6 = 18$ (cm^2).
Αφού το εμβαδόν του τραπεζίου είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου, έχουμε:
$(\text{ΑΒΓΔ}) = 3 \cdot (\text{ΑΕΖΔ})$ ή $3(2x + 7) = 3 \cdot 18$
Δηλαδή:
$2x + 7 = 18$ ή $2x = 11$ ή $x = 5{,}5$ (cm).

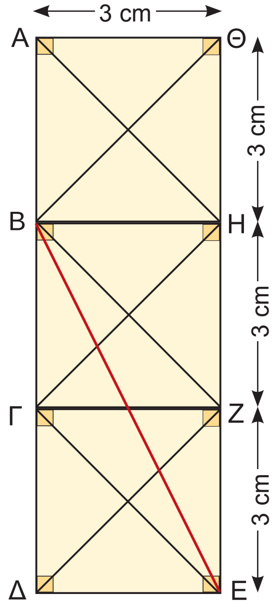


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα:

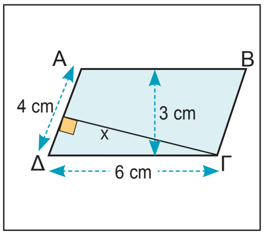
		Α	Β	Γ
1	Το εμβαδόν του ΑΒΗΘ είναι:	3	6	9
2	Το εμβαδόν του ΑΓΖΘ είναι:	6	12	18
3	Το εμβαδόν του ΑΓΕΗ είναι:	12	18	21
4	Το εμβαδόν του ΑΗΓ είναι:	9	12	4,5
5	Το εμβαδόν του ΒΖΗ είναι:	9	12	4,5
6	Το εμβαδόν του ΑΔΖΗ είναι:	12	18	21
7	Το εμβαδόν του ΑΔΕΗ είναι:	22,5	18	27
8	Το εμβαδόν του ΑΒΕΘ είναι:	22,5	18	21

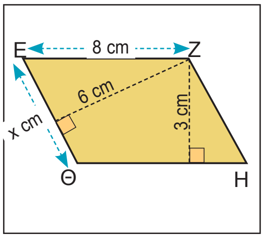
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

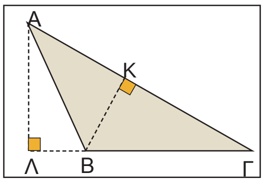


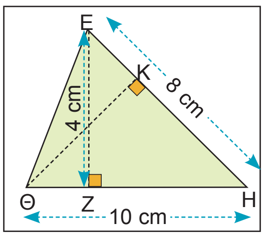
2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

		Α	Β	Γ
1	Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:	24	9	18
2	Το ύψος x που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΔ είναι:	5,5	9	4,5
3	Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ είναι:	24	12	32
4	Η πλευρά x = ΕΘ είναι:	4	6	5
5	Ποιο από τα επόμενα δεν είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ;	$\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{2}$	$\frac{ΑΓ\cdot ΒΚ}{2}$	$\frac{ΒΓ\cdot ΑΛ}{2}$
6	Το εμβαδόν του τριγώνου ΕΘΗ είναι:	32	16	20
7	Το ύψος ΘΚ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΕΗ είναι:	4	5	6

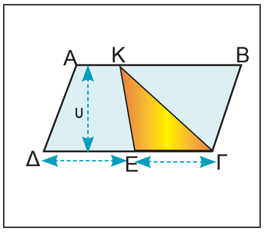


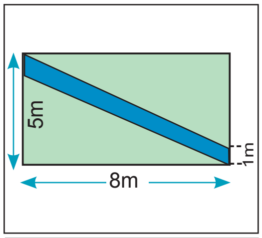


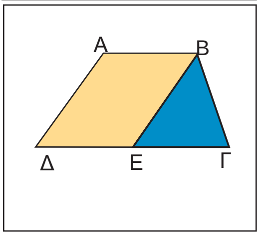




		Α	Β	Γ
8	Το διπλανό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν 16cm^2 και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΕΓ είναι:	4	6	8
9	Το εμβαδόν του μπλε παραλληλογράμμου είναι:	5	4	8
10	Το εμβαδόν κάθε πράσινου τριγώνου είναι:	16	20	17,5
11	Αν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ είναι 12cm^2 και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, τότε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι:	24	16	18





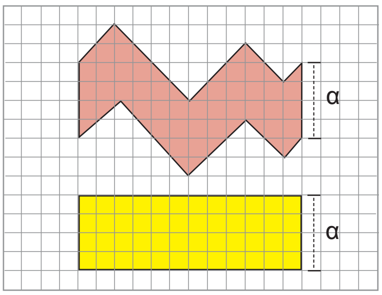


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Αν η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 60 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

2 Οι διαστάσεις ενός φύλλου στο εικοσάφυλλο τετράδιο του Σταύρου είναι 21 cm και 30 cm. Να υπολογίσετε πόση επιφάνεια χαρτιού έχει όλο το τετράδιο.

3 Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα εμβαδά του ροζ και του κίτρινου σχήματος είναι ίσα.

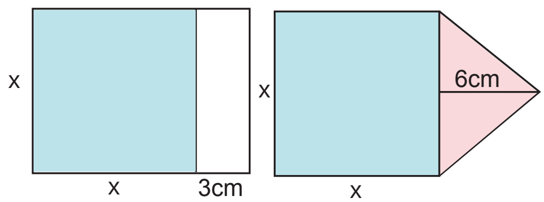


4 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη συνέχεια να προεκτείνετε την πλευρά ΑΒ του τετραγώνου και να πάρετε τμήμα ΒΕ = ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ και το τρίγωνο ΑΕΔ έχουν ίσα εμβαδά.

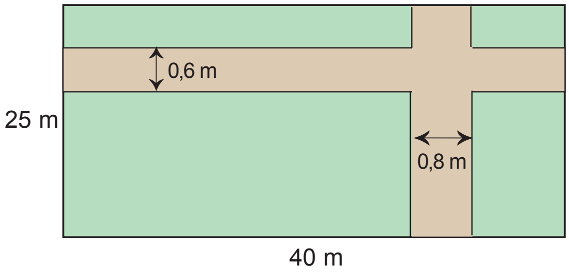
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΕΔ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του ΒΓΕ.

5 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο σχημάτων στο παρακάτω σχήμα, αν x = 5 cm. Στη συνέχεια, να εξηγήσετε γιατί αυτά είναι ίσα για οποιαδήποτε τιμή του x.



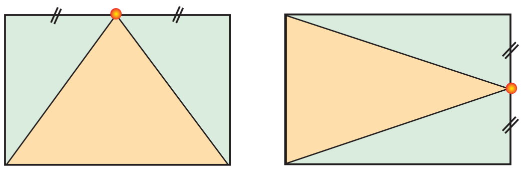
6 Ένα τετράγωνο και ένα τραπέζιο έχουν ίσα εμβαδά. Αν οι βάσεις του τραπεζίου είναι 12 cm και 20 cm και το ύψος του είναι 4 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

7 Ένας ορθογώνιος κήπος έχει διαστάσεις 40 m και 25 m. Τον κήπο διασχίζουν δύο κάθετα μεταξύ τους δρομάκια. Το ένα παράλληλο προς τη μεγάλη πλευρά του κήπου με πλάτος 0,6 m και το άλλο με πλάτος 0,8 m. Το υπόλοιπο τμήμα θα



φυτευτεί με γκαζόν. Να υπολογίσετε το κόστος της κατασκευής του γκαζόν, αν ο γεωπόνος χρεώνει 12 € κάθε m^2 γκαζόν.

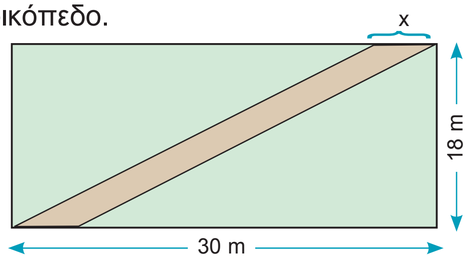
8 Τα παρακάτω ορθογώνια έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Εξηγήστε γιατί τα πράσινα μέρη των δύο ορθογωνίων έχουν ίσα εμβαδά.



9 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου, το οποίο διασχίζει διαγώνια ένας δρόμος σταθερού πλάτους.

α) Να αποδείξετε ότι τα τριγωνικά οικόπεδα που απομένουν έχουν ίσα εμβαδά.

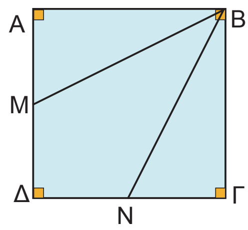
β) Να υπολογίσετε το x, ώστε ο δρόμος να «αποκόπτει» από το οικόπεδο τμήμα του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού που απομένει στο οικόπεδο.



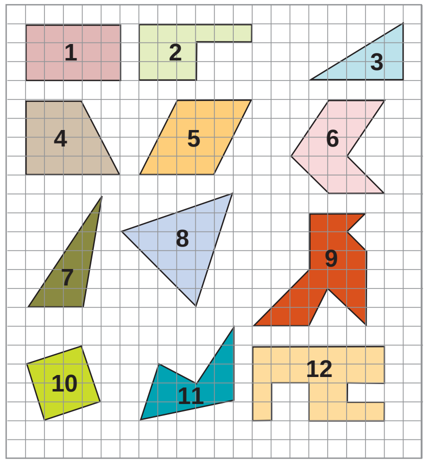
10 Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι Μ και Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΔΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΝΓΒ έχουν ίσα εμβαδά.

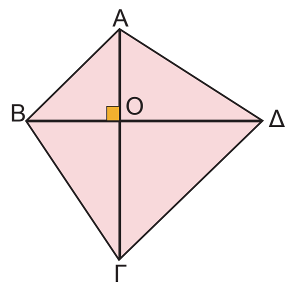
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΜΔΝ έχει εμβαδόν όσο είναι το άθροισμα των εμβαδών των παραπάνω τριγώνων.



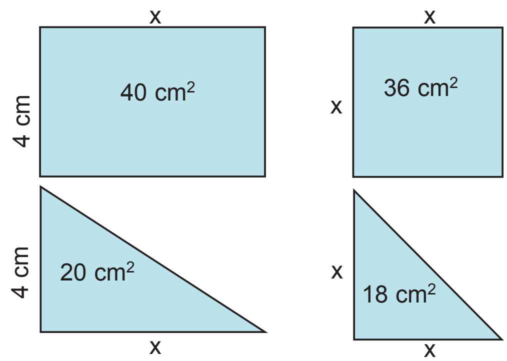
11 Στα παρακάτω σχήματα κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm. Να βρείτε τα εμβαδά των 12 σχημάτων που δίνονται:



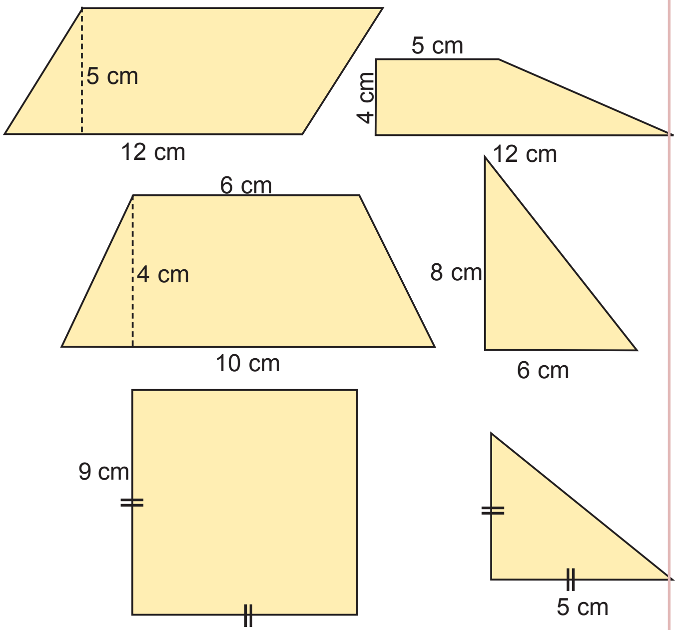
12 Στο τετράπλευρο του διπλανού σχήματος οι διαγώνιες είναι κάθετες.
Αν ΒΔ=5 cm, ΟΑ=3cm και ΟΓ=6cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου.



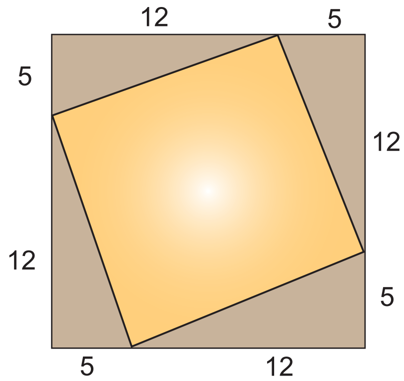
13 Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.



14 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:



15 Να βρείτε το εμβαδόν του πορτοκαλί τετραγώνου του παρακάτω σχήματος.

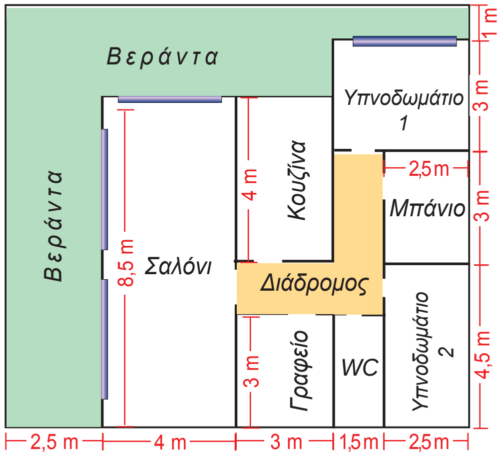


16 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η κάτοψη ενός διαμερίσματος. Να βρείτε:

α) Το εμβαδόν κάθε δωματίου.

β) Το εμβαδόν του γωνιακού διαδρόμου.

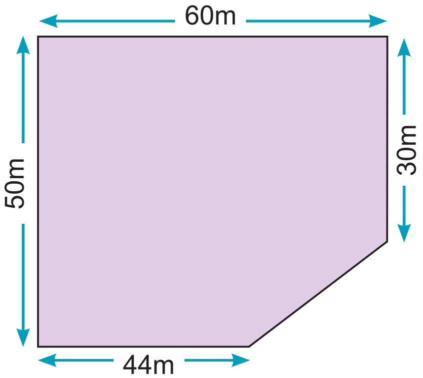
γ) Το εμβαδόν της βεράντας.



17 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος το οποίο πωλείται προς 20.000 € το στρέμμα.

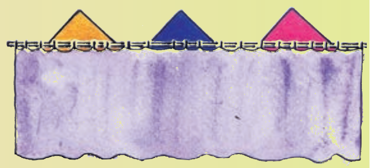
α) Να βρεθεί η αξία του κτήματος.

β) Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό, αν κάθε κλήμα απαιτεί 2,5 m^2 χώρο;



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

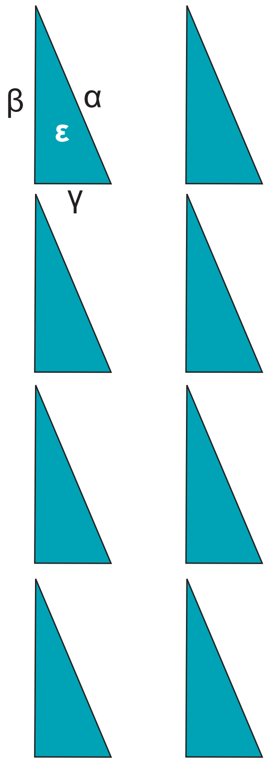
Πίσω από την κουρτίνα κρύβονται ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο.



Βρείτε τη θέση και το εμβαδόν καθενός, αν γνωρίζετε ότι:

1. *Το ορθογώνιο έχει τετραπλάσιο εμβαδόν και βρίσκεται πιο αριστερά από το τετράγωνο.*
2. *Ένα σχήμα εμβαδού 100 cm^2 βρίσκεται δεξιά από το ορθογώνιο τρίγωνο.*
3. *Δεξιά από ένα σχήμα με τέσσερις ορθές γωνίες βρίσκεται το ορθογώνιο τρίγωνο.*
4. *Οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου.*

1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε, Ε, E_1, E_2 των διπλανών τριγώνων και τετραγώνων.

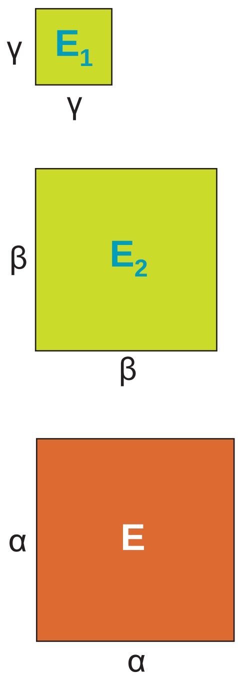
β) Να τοποθετήσετε κατάλληλα τα τρίγωνα και τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν δύο νέα τετράγωνα, πλευράς (β + γ).

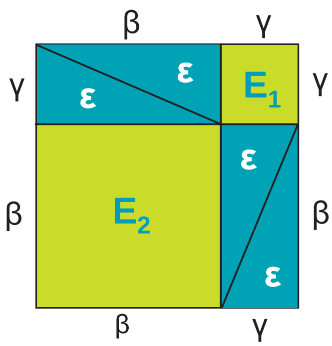
Λύση

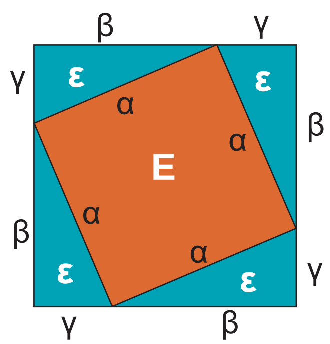
α) Έχουμε ότι: $ε = \dfrac{β \cdot γ}{2}$

$E = α^2$
$E_1 = γ^2$
$E_2 = β^2$

β) Αρκεί να τα τοποθετήσουμε όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το εμβαδόν των ίσων τετραγώνων πλευράς (β + γ) με δύο διαφορετικούς τρόπους:
1ος τρόπος: $E_1 + E_2 + 4ε$ από το πρώτο τετράγωνο που αποτελείται από 4 τρίγωνα και τα δύο τετράγωνα πλευράς β, γ αντίστοιχα.
2ος τρόπος: $E + 4ε$ από το δεύτερο τετράγωνο που αποτελείται πάλι από 4 τρίγωνα και το τετράγωνο πλευράς α.



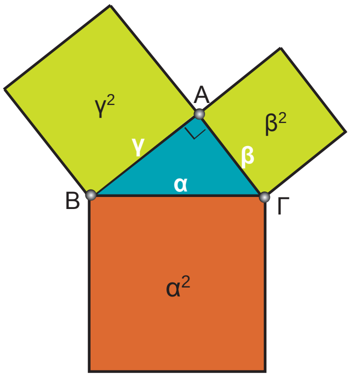




Επομένως, θα ισχύει ότι: $E_1 + E_2 + 4ε = E + 4ε$ ή
$E_1 + E_2 = E$ ή

$$β^2 + γ^2 = α^2$$

Η σχέση αυτή, που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το **Πυθαγόρειο θεώρημα**, δηλαδή ισχύει:



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

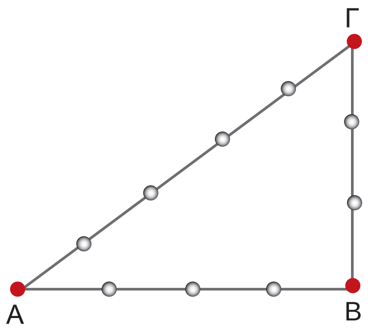
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Παρατήρηση:

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, δηλαδή το εμβαδόν του μεγάλου πορτοκαλί τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πράσινων τετραγώνων.

Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν το σκοινί του παραπάνω σχήματος. Όπως βλέπουμε, το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

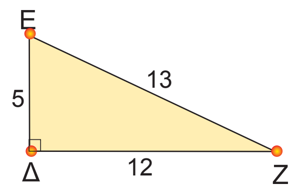


Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντώνοντας το σκοινί στους κόκκινους κόμπους, σχηματίζεται το τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την κορυφή Β. Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την επόμενη γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.



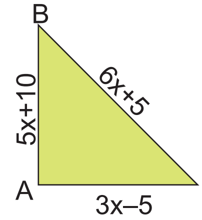
Λύση: Στο τρίγωνο ΔΕΖ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 5 και 12, οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

Επιπλέον, η υποτείνουσα έχει μήκος 13 και το τετράγωνό της ισούται με: $13^2 = 169$.

Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 150 m.
α) Να βρείτε τον αριθμό x.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

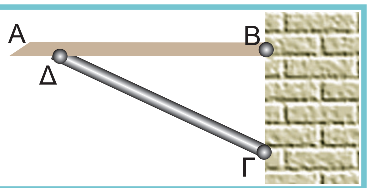


Λύση: α) Η περίμετρος του τριγώνου είναι:
$AB + B\Gamma + \Gamma A = 5x + 10 + 6x + 5 + 3x - 5 = 14x + 10$.
Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:
$14x + 10 = 150$ ή $14x = 150 - 10$ ή
$14x = 140$ ή $x = \frac{140}{14}$.
Άρα $x = 10$.

β) Για $x = 10$ τα μήκη των πλευρών (σε μέτρα) είναι:
$AB = 5 \cdot 10 + 10 = 60$,
$A\Gamma = 3 \cdot 10 - 5 = 25$,
$B\Gamma = 6 \cdot 10 + 5 = 65$.
Επομένως: $AB^2 + A\Gamma^2 = 60^2 + 25^2 = 3600 + 625 = 4225$.
Επίσης: $B\Gamma^2 = 65^2 = 4225$.
Επομένως: $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ και σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

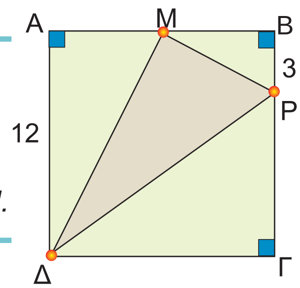
Ένα ράφι ΑΒ είναι στερεωμένο σε ένα κατακόρυφο τοίχο με ένα μεταλλικό στήριγμα μήκους ΓΔ = 32,6 cm. Αν ΒΔ = 27,7 cm και ΒΓ = 17,2 cm, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



Λύση: Το ράφι θα είναι οριζόντιο, μόνο αν είναι κάθετο στον τοίχο, δηλαδή αν το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο στο Β.
Είναι: $B\Delta^2 + B\Gamma^2 = 27{,}7^2 + 17{,}2^2 = 767{,}29 + 295{,}84 = 1063{,}13$.
Επίσης: $\Gamma\Delta^2 = 32{,}6^2 = 1062{,}76$.
Επομένως: $B\Delta^2 + B\Gamma^2 \neq \Gamma\Delta^2$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΔ δεν είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12 cm. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΒΡ = 3 cm.
α) Να υπολογίσετε τα $M\Delta^2$, MP^2 και ΔP^2.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.



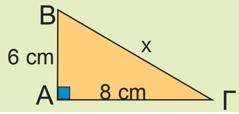
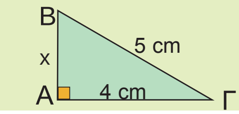
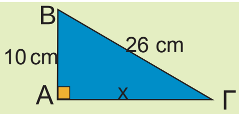
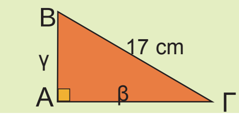
Λύση: α) Αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ, είναι ΑΜ = ΜΒ = 6 (cm).
Επίσης: ΓΡ = 12 – 3 = 9 (cm).
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ έχουμε:
$M\Delta^2 = A\Delta^2 + AM^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΡ έχουμε:
$ΜΡ^2 = ΜΒ^2 + ΒΡ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$,
και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΡ έχουμε:
$ΔΡ^2 = ΔΓ^2 + ΡΓ^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.

β) Είναι $ΜΔ^2 + ΜΡ^2 = 180 + 45 = 225 = ΔΡ^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.

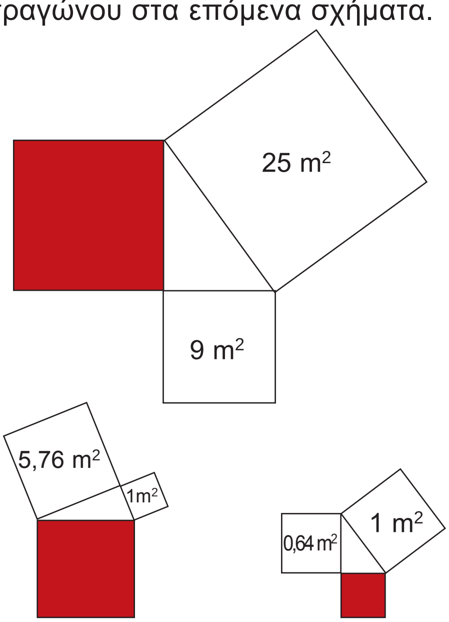
ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Στις παρακάτω ερωτήσεις 1 - 4 τα τρίγωνα ΑΒΓ είναι ορθογώνια στο Α.
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

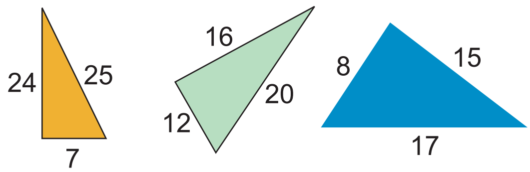
			Α	Β	Γ	Δ
1		x =	7 cm	9 cm	10 cm	12 cm
2		x =	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
3		x =	14 cm	20 cm	24 cm	30 cm
4		β = και γ =	β=15 και γ=8	β=13 και γ=10	β=12 και γ=13	β=8 και γ=9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου στα επόμενα σχήματα.



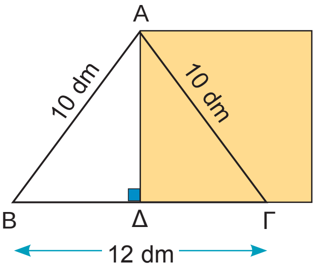
2 Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.



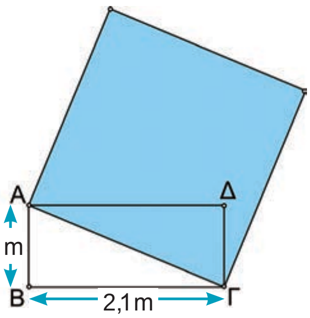
3 α) Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών 6 cm, 8 cm και 10 cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, καθώς και το τρίγωνο που έχει τις μισές πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, είναι επίσης ορθογώνιο.

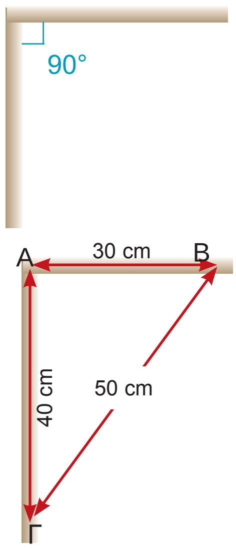
4 Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 10 dm και ΒΓ = 12 dm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με το ύψος ΑΔ του τριγώνου.



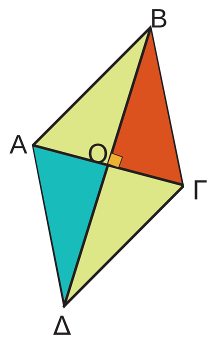
5 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



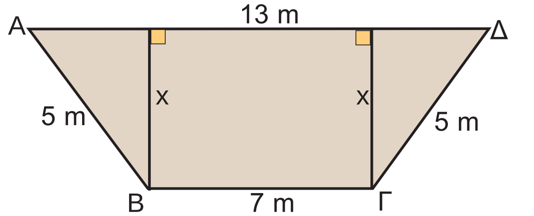
6 Για να σχηματίσει ορθή γωνία με δύο ξύλινα δοκάρια (όπως λέμε για να «γωνιάσει» τα δοκάρια), ένας τεχνίτης μετράει στο ένα δοκάρι ΑΒ = 30 cm και στο άλλο ΑΓ = 40 cm. Στη συνέχεια, τα τοποθετεί κατάλληλα, ώστε να είναι ΒΓ = 50 cm. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι η γωνία που σχηματίζουν τα δοκάρια είναι ορθή;



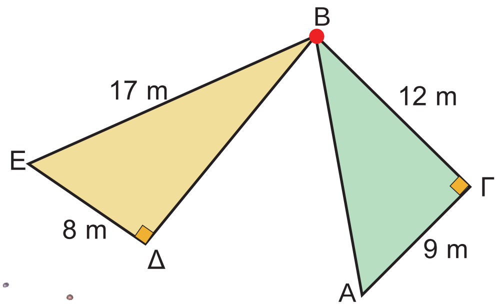
7 Ο χαρταετός του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με διαγώνιες 12 dm και 16 dm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν της επιφάνειας του χαρταετού.



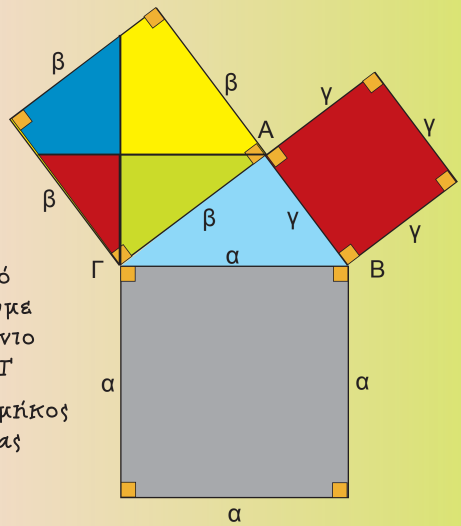
8 Η διατομή ενός καναλιού είναι σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου με πλευρές: ΓΔ = ΑΒ = 5 m, ΒΓ = 7 m και ΑΔ = 13 m. Να υπολογίσετε το ύψος x του καναλιού.



9 Ποια από τις τοποθεσίες Ε, Δ, Α είναι πλησιέστερα στην πόλη Β;

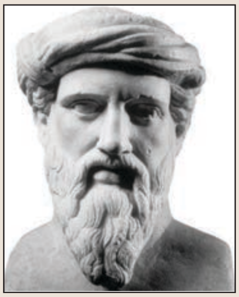


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:



Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) με μήκος υποτείνουσας α και μήκη κάθετων πλευρών β και γ. Εξωτερικά του τριγώνου έχουμε κατασκευάσει τρία τετράγωνα με μήκη πλευρών α, β και γ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα χρωματιστά «κομμάτια» που αποτελούν τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών, μπορείτε να «γεμίσετε» το μεγάλο γκρίζο τετράγωνο της υποτείνουσας εφαρμόζοντας ακριβώς τα χρωματιστά κομμάτια χωρίς το ένα να επικαλύπτει το άλλο;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα πιο κομψά αλλά ταυτόχρονα και πιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές.

Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον ***Πυθαγόρα το Σάμιο*** *(585 - 500 π.Χ.), δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε.*

Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση, οι θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο θεώρημα και όταν το απέδειξε, για να τους ευχαριστήσει, έκανε θυσία 100 βοδιών. Για τον λόγο αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως "θεώρημα της εκατόμβης".

Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος.

Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σ' αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες, όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ Garfield.

Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος σ' ένα βιβλίο.

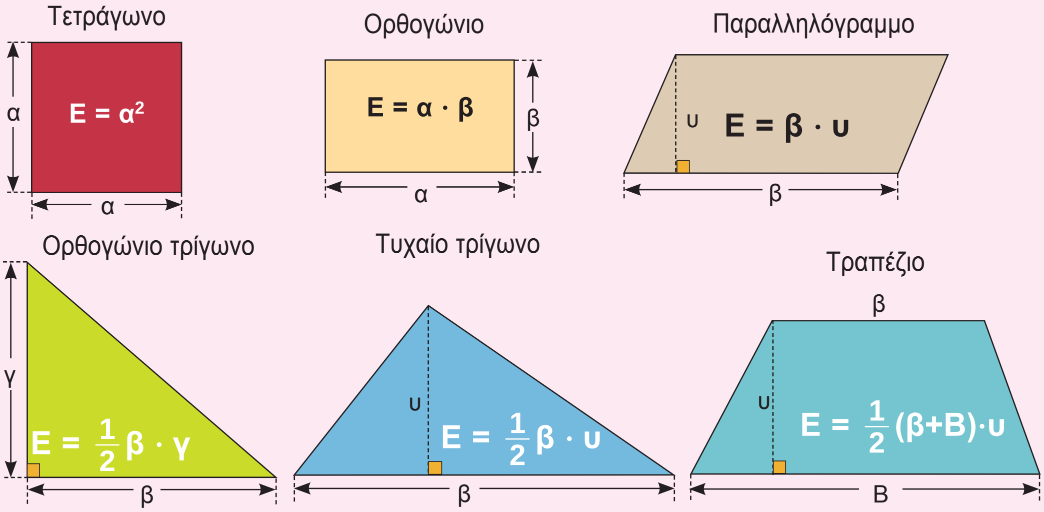
Επανάληψη Κεφαλαίου 1

Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων - Πυθαγόρειο θεώρημα

- Το **εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας** είναι ο θετικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των μονάδων μέτρησης, το οποίο χρειάζεται να πάρουμε, ώστε να καλύψουμε τη δοσμένη επιφάνεια.
- **Μονάδες μέτρησης εμβαδών**

1 m^2=	100 dm^2 =	10.000 cm^2 =	1.000.000 mm^2
	1 dm^2 =	100 cm^2 =	10.000 mm^2
		1 cm^2 =	100 mm^2

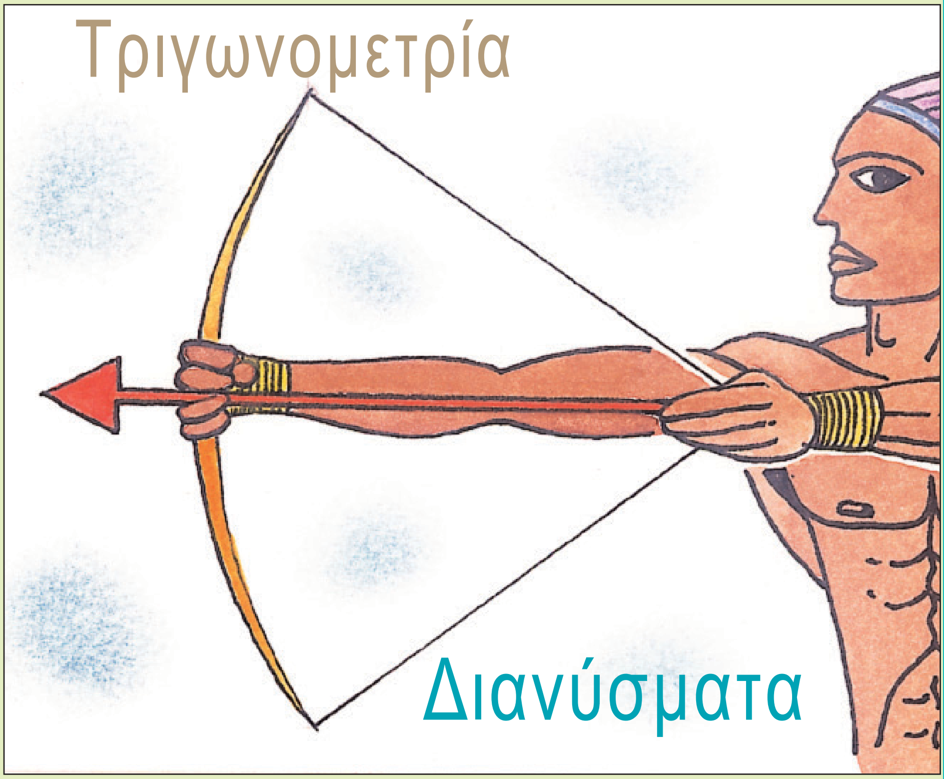
- **Εμβαδά των βασικών επιπέδων σχημάτων.**



- **Πυθαγόρειο θεώρημα: $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$**
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
- **Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος**
Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

2.5 Η έννοια του διανύσματος

2.6 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

2.7 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την **ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ** και τα **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ**.

Η Τριγωνομετρία, όπως προδίδει και το όνομά της, ασχολείται με τη μέτρηση των τριγώνων και για την ακρίβεια με τη μέτρηση των στοιχείων των τριγώνων. Είναι ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε από πολύ παλιά, από τους αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι τη χρησιμοποίησαν με θαυμαστά αποτελέσματα.

Ιδιαίτερα εύστοχη ήταν η εκτίμηση του Γάλλου μαθηματικού D' Alembert το 1789: *«Η τριγωνομετρία είναι η τέχνη να βρίσκεις τα άγνωστα στοιχεία ενός τριγώνου με τα λιγότερα μέσα που διαθέτεις»*.

Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη των τριγωνομετρικών αριθμών (**ημίτονο, συνημίτονο** και **εφαπτομένη**) οξείας γωνίας. Θα εξετάσουμε τις μεταβολές τους και θα τους χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε αρκετά προβλήματα.

Στη συνέχεια, στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε τα διανύσματα, μια έννοια γνωστή κυρίως από τη Φυσική.

Χρησιμοποιώντας διανύσματα μπορούμε να παραστήσουμε διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως τη δύναμη, την ταχύτητα κ.ά., στα οποία εκτός από το μέτρο τους είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε και την κατεύθυνσή τους.

Είναι, λοιπόν, πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τα στοιχεία ενός διανύσματος, να μπορούμε να κάνουμε πράξεις μ' αυτά, καθώς και να τα αναλύουμε σε συνιστώσες.

Αρκετές δραστηριότητες από την καθημερινή μας ζωή και αρκετά παραδείγματα από τη Φυσική θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε πλήρως τη χρήση των διανυσμάτων.

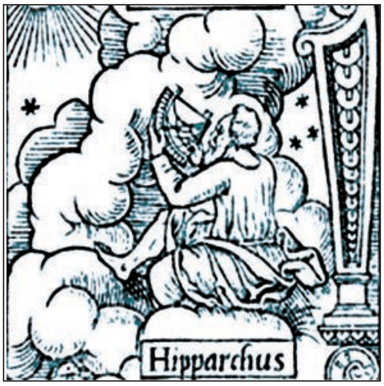
Τι είναι η Τριγωνομετρία;

Η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε αρχικά για τις ανάγκες της **Αστρονομίας** και της **Γεωγραφίας**, αλλά χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια πολλών αιώνων και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, στη **Φυσική**, στη **Μηχανική** και στη **Χημεία**.

Οι έννοιες του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας προέκυψαν από τις παρατηρήσεις των Αστρονόμων της Αρχαιότητας.

Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι τα αστέρια βρίσκονταν πάνω σε μια τεράστια νοητή σφαίρα, στην οποία κινούνταν μόνο οι τότε γνωστοί πλανήτες: Ερμής, Αφροδίτη, Άρης, Δίας, Κρόνος, Σελήνη. Στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν τις αποστάσεις μεταξύ των πλανητών –που είναι αδύνατον να μετρηθούν άμεσα– οι αρχαίοι Έλληνες προσπάθησαν να τις υπολογίσουν από τις γωνίες που σχημάτιζαν μεταξύ τους.

Ο **Αρίσταρχος ο Σάμιος, ο Πτολεμαίος, ο Ίππαρχος** και άλλοι, που ασχολήθηκαν με την Αστρονομία, βρήκαν σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών τριγώνων.

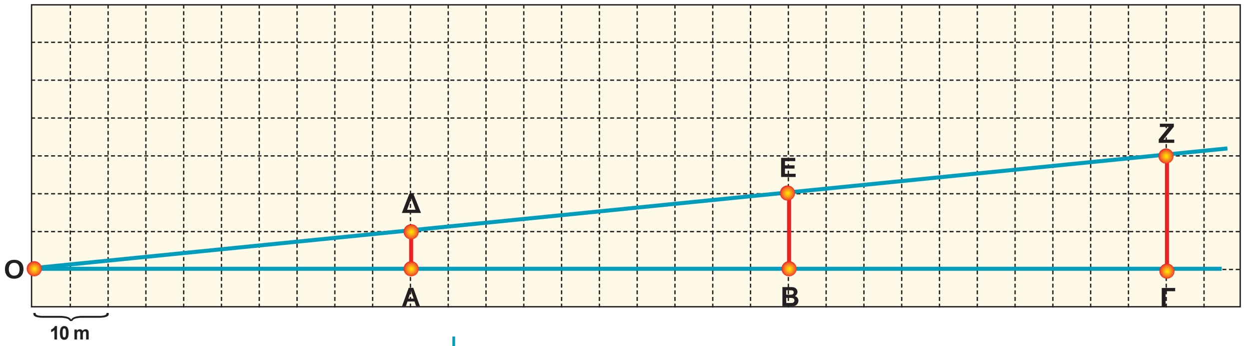


Περίπου δύο χιλιάδες χρόνια πριν δημιουργήθηκαν τριγωνομετρικοί πίνακες, δηλαδή πίνακες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονα, συνημίτονα, εφαπτομένες) γωνιών. Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αυτών αριθμών δεν ήταν καθόλου απλός. Άρχισε να απλοποιείται μετά τον 17ο αιώνα μ.Χ. και στις ημέρες μας είναι πανεύκολος με τη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Σκοπός αυτών των πινάκων ήταν να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί της Αστρονομίας.

Οι εφαρμογές της Αστρονομίας ήταν πολλές και εντυπωσιακές. Ένα απλό παράδειγμα είναι η ναυσιπλοΐα κατά τη διάρκεια της νύχτας. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν ένα ναυτικό όργανο, τον αστρολάβο, με τον οποίο μετρούσαν ουσιαστικά γωνίες και με τη χρήση της τριγωνομετρίας υπολόγιζαν αποστάσεις και χάραζαν την πορεία τους.

Οι αρχαίοι Έλληνες γνωρίζοντας ότι η Γη είναι σφαιρική χρησιμοποίησαν την Τριγωνομετρία στη Γεωγραφία. Ο Πτολεμαίος χρησιμοποίησε τριγωνομετρικούς πίνακες στο έργο του «Γεωγραφία», ενώ ο Κολόμβος είχε πάντα μαζί του στα ταξίδια του το έργο του Regiomontanus: «Ephemerides Astronomicae». Παρόλο που η Τριγωνομετρία εφαρμόστηκε αρχικά στη σφαίρα, έχει περισσότερες εφαρμογές στο επίπεδο.
Η Τριγωνομετρία αποτελεί βασικό πεδίο γνώσης, καθώς συμβάλλει στην κατανόηση του χώρου και των ιδιοτήτων του.
Οι εφαρμογές της Τριγωνομετρίας δεν περιορίζονται στη Γεωμετρία, αλλά επεκτείνονται στις βολές στη Φυσική, στην ανάκλαση στην Οπτική, στις αντοχές υλικών στη Στατική και σε άλλους κλάδους των Φυσικών ή ακόμα και των Κοινωνικών επιστημών.

2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

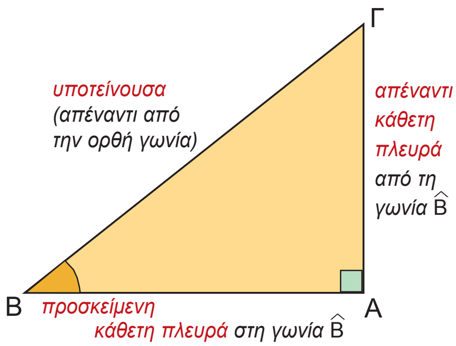
Η πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο Ο πληροφορεί τον οδηγό του αυτοκινήτου πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος ΟΓ. Το ποσοστό 10% ή $\frac{10}{100}$ = 0,1 σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m. Έτσι, π.χ. στο σημείο Α είναι ΟΑ = 50 m και ανεβαίνουμε ΑΔ = 50 · 0,1 m = 5 m.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 5	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$ =
ΟΒ = 100	ΒΕ =	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$ =
ΟΓ = 150	ΓΖ =	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$ =

Τι παρατηρείτε;

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}$ = 90°) η κάθετη πλευρά ΑΓ, ονομάζεται «απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{Β}$» και η ΑΒ «προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{Β}$».



Φυσικά, προκειμένου για τη γωνία $\hat{Γ}$, η ΑΒ είναι η «απέναντι», ενώ η ΑΓ είναι η «προσκείμενη» κάθετη πλευρά.

Λύση

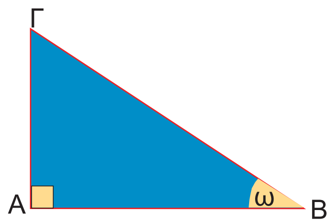
Παρατηρούμε ότι ΒΕ = 10, ΓΖ = 15, οπότε οι λόγοι της τρίτης στήλης παραμένουν σταθεροί:

$$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} = \frac{5}{50} = 0,1$$

$$\frac{ΒΕ}{ΟΒ} = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$\frac{ΓΖ}{ΟΓ} = \frac{15}{150} = 0,1$$

Αν ονομάσουμε ω τη γωνία που σχηματίζει ο ανηφορικός δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο, τότε οι λόγοι $\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$, $\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$, $\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$ και γενικά ο λόγος $\frac{\text{ύψος}}{\text{οριζόντια απόσταση}}$ είναι ο ίδιος για όλα τα σημεία



της ευθείας ΟΖ. Ο σταθερός αυτός λόγος λέγεται εφαπτομένη της γωνίας ω και γράφουμε εφω = 0,1. Ειδικά, όταν αναφερόμαστε σε δρόμο, όπως παραπάνω, η εφαπτομένη της γωνίας ω ονομάζεται **κλίση** του δρόμου.
Σε οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία ω ο σταθερός αυτός λόγος γράφεται ως εξής:

$$\frac{\textbf{απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας ω}}{\textbf{προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας ω}}$$

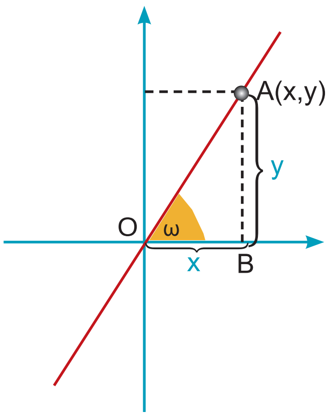
ονομάζεται εφαπτομένη της γωνίας ω και συμβολίζεται με εφω.

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη της γωνίας ω**.

***Σχόλιο 1*:**

Ας θυμηθούμε την κλίση της ευθείας με εξίσωση y = αx, που συναντήσαμε στην παράγραφο 3.2.
Είδαμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με τον αριθμό α για κάθε σημείο Α της ευθείας με εξίσωση y = αx.
Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με εξίσωση y = αx με τον άξονα x′x, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$$\text{εφω} = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x} = \alpha$$



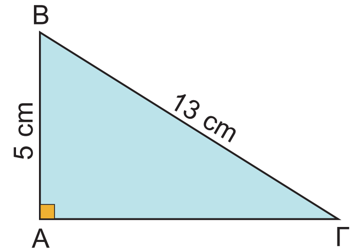
Η κλίση α της ευθείας με εξίσωση y = αx είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x′x.

***Σχόλιο 2*:**

Για να υπολογίσουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 1° – 89°, που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου (σελ. 254).
Σε επόμενη παράγραφο (§2.3) θα μάθουμε να υπολογίζουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας χρησιμοποιώντας έναν «επιστημονικό» υπολογιστή τσέπης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 13 cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος ΑΒ = 5 cm, να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.



Λύση: Γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\widehat{B} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Επομένως, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα γνωρίζουμε ότι $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ και αντικαθιστώντας με ΑΒ = 5 cm και ΒΓ = 13 cm, έχουμε:

$$5^2 + A\Gamma^2 = 13^2 \;\; \text{ή} \;\; 25 + A\Gamma^2 = 169 \;\; \text{ή} \;\; A\Gamma^2 = 169 - 25 = 144$$

Επομένως, $A\Gamma = \sqrt{144} = 12$ (cm).

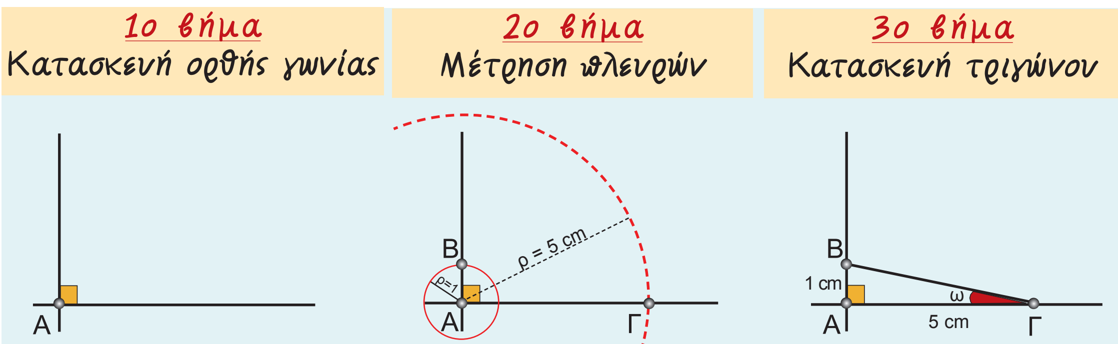
Άρα: $\varepsilon\varphi\widehat{B} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{12}{5}$ και $\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{5}{12}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιάσετε μια γωνία ω, με $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{5}$.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$.

Επομένως, για να σχεδιάσουμε μια οξεία γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 1 και η άλλη κάθετη πλευρά ίση με 5.



Για τη γωνία ω ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{5}$.

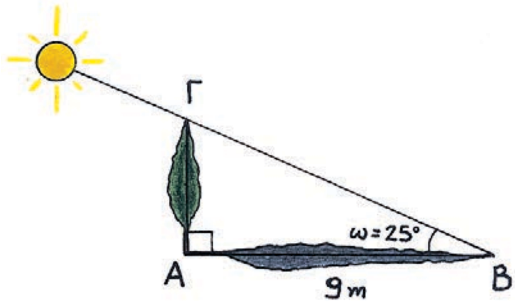
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε το ύψος του κυπαρισσιού του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας το μήκος της σκιάς του και τη γωνία ω.

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 9 m και $\widehat{B} = \omega = 25°$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε την πλευρά ΑΓ.
Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει την απέναντι με την προσκείμενη πλευρά μιας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι η εφαπτομένη της γωνίας $\widehat{B}$.

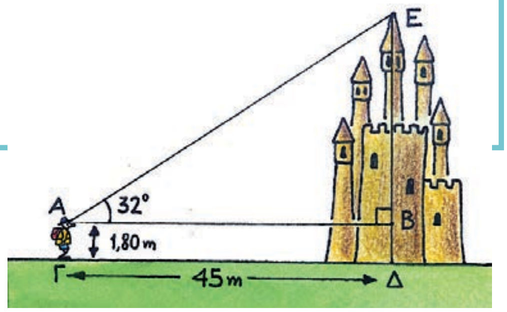
Έχουμε λοιπόν: $εφ\widehat{B} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$ οπότε

$ΑΓ = ΑΒ \cdot εφ\widehat{B}$ άρα $ΑΓ = 9 \cdot εφ25°$.
Με τη βοήθεια του πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι εφ25° = 0,47.
Άρα, ΑΓ = 9 · 0,47 = 4,23, δηλαδή το ύψος του κυπαρισσιού είναι 4,23 m.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας τουρίστας ύψους ΑΓ = 1,80 m «βλέπει» τον πύργο με γωνία 32° και απέχει από αυτόν 45 m. Να υπολογίσετε το ύψος ΕΔ του πύργου.



Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ γνωρίζουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΒ = 45 m και μια οξεία γωνία 32°. Επομένως, για να υπολογίσουμε την άλλη κάθετη πλευρά ΒΕ, χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη της γωνίας των 32°.

Είναι $εφ32° = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \dfrac{ΒΕ}{ΑΒ} = \dfrac{ΒΕ}{45}$.

Από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε: εφ32° = 0,62, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $0,62 = \dfrac{ΒΕ}{45}$, οπότε έχουμε: ΒΕ = 45·0,62 = 27,9 (m).

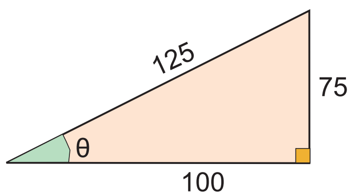
Επομένως, το συνολικό ύψος του πύργου είναι:
ΔΕ = ΔΒ + ΒΕ = 1,8 + 27,9 = 29,7 (m).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα είναι εφθ = ...

Α: $\dfrac{100}{75}$, Β: $\dfrac{125}{75}$, Γ: $\dfrac{75}{100}$, Δ: $\dfrac{75}{125}$.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



2. Στο διπλανό σχήμα είναι:

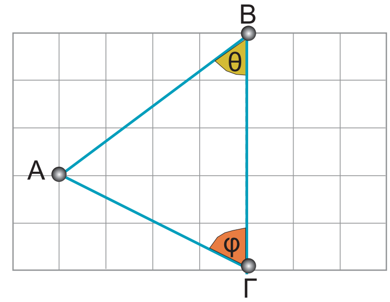
α) εφθ = ...

A: $\frac{3}{4}$, B: $\frac{4}{3}$, Γ: $\frac{4}{5}$, Δ: $\frac{3}{5}$.

β) εφφ = ...

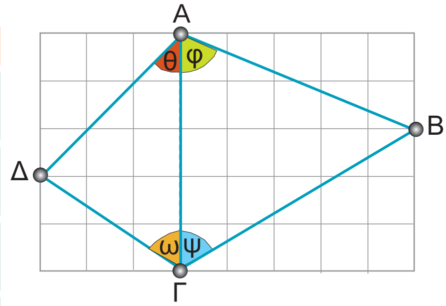
A: $\frac{4}{3}$, B: $\frac{3}{4}$, Γ: $\frac{2}{4}$, Δ: 2.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



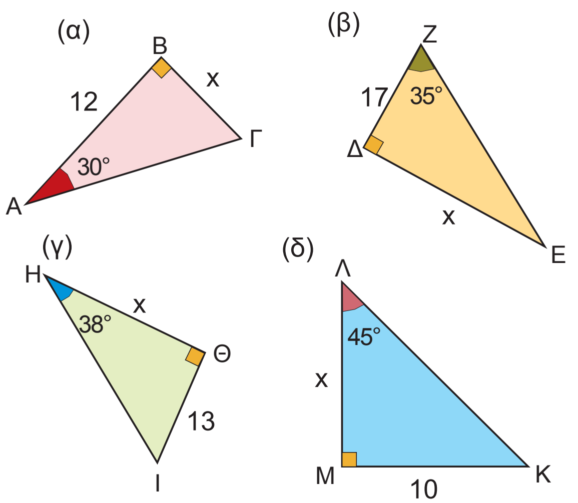
3. Σε κάθε γωνία θ, φ, ω, ψ του διπλανού σχήματος να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της.

Γωνία	Εφαπτομένη
θ	$\frac{5}{3}$
φ	$\frac{5}{2}$
ω	1
ψ	$\frac{3}{2}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

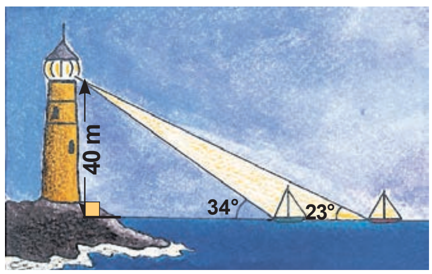
1 Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε το μήκος x:



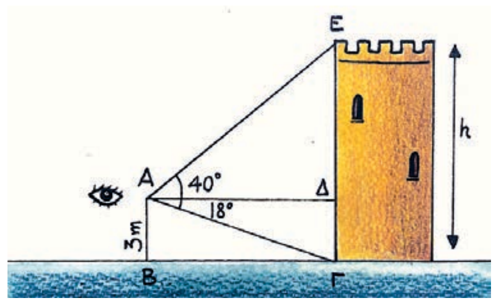
2 Να σχεδιάσετε μια γωνία ω με εφω = 0,7.

3 Ποια στοιχεία μπορείτε να υπολογίσετε σε ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία 30°, αν η απέναντι κάθετη πλευρά έχει μήκος 4 cm;

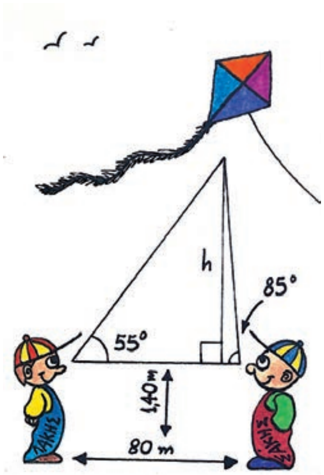
4 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση των δύο πλοίων.



5 Ένας τουρίστας βλέπει την κορυφή ενός πύργου από σημείο Α με γωνία 40° και τη βάση του πύργου με γωνία 18°. Αν γνωρίζετε ότι ΑΒ = 3 m, να υπολογίσετε το ύψος h του πύργου.



6 Την Καθαρά Δευτέρα ο Λάκης και ο Σάκης βλέπουν τον χαρταετό του Μάκη με γωνίες 55° και 85° αντίστοιχα.
Ο Λάκης και ο Σάκης βρίσκονται σε απόσταση 80 m. Να βρείτε σε τι ύψος από το έδαφος έχει ανέβει ο χαρταετός του Μάκη, αν γνωρίζουμε ότι τα μάτια του Λάκη και του Σάκη βρίσκονται σε ύψος 1,40 m.



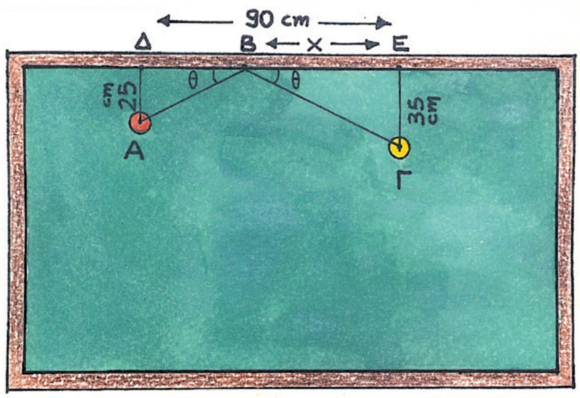
7 Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα τραπέζι του μπιλιάρδου.
Δύο μπάλες Α και Γ είναι τοποθετημένες έτσι ώστε, ΔΕ = 90 cm, ΑΔ = 25 cm, ΓΕ = 35 cm και ΒΕ = x cm. Ένας παίκτης θέλει να χτυπήσει την μπάλα Γ με την μπάλα Α ακολουθώντας τη διαδρομή ΑΒΓ του σχήματος.

α) Να εκφράσετε την απόσταση ΒΔ ως συνάρτηση του x.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΒ να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του x.

γ) Στο τρίγωνο ΒΕΓ να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του x.

δ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα των ερωτημάτων (β) και (γ), να αποδείξετε ότι το x είναι λύση της εξίσωσης $35(90 – x) = 25x$. Να προσδιορίσετε τον αριθμό x.



2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

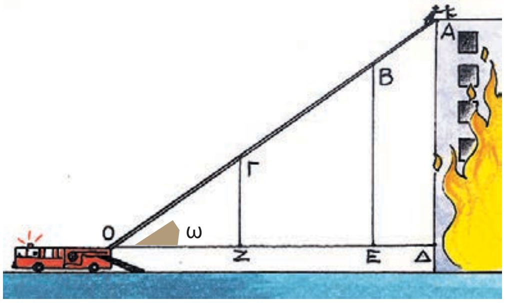
Το ημίτονο

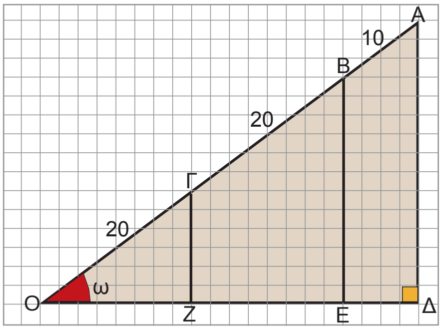
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

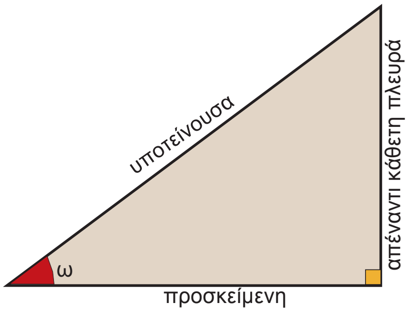
Ένα πυροσβεστικό όχημα σταματά μπροστά από ένα κτίριο που φλέγεται, για να κατεβάσει έναν άνθρωπο που βρίσκεται στην ταράτσα του κτιρίου. Η σκάλα του οχήματος έχει μήκος ΟΑ = 50 m και το κτίριο έχει ύψος ΑΔ = 30 m. Ο πυροσβέστης που βρίσκεται στην άκρη της σκάλας παίρνει τον άνθρωπο που κινδυνεύει και η σκάλα αρχίζει να μαζεύεται.
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 30	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$ =
ΟΒ = 40	ΒΕ = 24	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$ =
ΟΓ = 20	ΓΖ = 12	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$ =

Τι παρατηρείτε;







Λύση

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι της τρίτης στήλης παραμένουν σταθεροί:

$$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5},\quad \frac{ΒΕ}{ΟΒ} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \frac{ΓΖ}{ΟΓ} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Είναι φανερό ότι ο λόγος αυτός παραμένει σταθερός για κάθε διαδοχική θέση της σκάλας. Επίσης, είναι φανερό ότι η γωνία ω στα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ που σχηματίζονται, παραμένει σταθερή.

Ο σταθερός αυτός λόγος γράφεται ως: $\dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$

ονομάζεται **ημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται με **ημω**. Δηλαδή

$$\boxed{\textbf{ημω} = \frac{\textbf{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\textbf{υποτείνουσα}}}$$

Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **ημίτονο της γωνίας ω.**

Το συνημίτονο

Αν συμπληρώσουμε, τώρα, τον παρακάτω πίνακα για το ίδιο σχήμα:

ΟΑ = 50	ΟΔ = 40	$\frac{ΟΔ}{ΟΑ} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$
ΟΒ = 40	ΟΕ = 32	$\frac{ΟΕ}{ΟΒ} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$
ΟΓ = 20	ΟΖ = 16	$\frac{ΟΖ}{ΟΓ} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

παρατηρούμε ότι σχηματίζεται και ένας δεύτερος σταθερός λόγος:

$$\frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Ο λόγος αυτός ονομάζεται **συνημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται **συνω**.

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο της γωνίας ω.**

Παρατηρήσεις:

α) Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις κάθετες πλευρές, οπότε οι λόγοι:

$$\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \quad \text{και} \quad \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

είναι μικρότεροι της μονάδας. Επομένως ισχύουν οι ανισώσεις:

$$\mathbf{0 < ημω < 1 \quad και \quad 0 < συνω < 1}$$

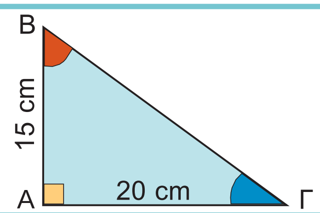
για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω.

β) Αν τώρα διαιρέσουμε το ημω με το συνω θα προκύψει $\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{ΑΔ}{ΟΑ}}{\frac{ΟΔ}{ΟΑ}} = \frac{ΑΔ}{ΟΔ} = εφω$, όπως φαίνεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ του σχήματος της προηγούμενης σελίδας. Άρα:

$$\text{εφω} = \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 15 cm και ΑΓ = 20 cm. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$.
Τι παρατηρείτε;



Λύση: Για τον υπολογισμό του ημιτόνου ή του συνημιτόνου μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, πρέπει να γνωρίζουμε και το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$ οπότε $ΒΓ = \sqrt{625} = 25$ cm.

Άρα:

$$ημ\widehat{B} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία } \widehat{B}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$συν\widehat{B} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία } \widehat{B}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$ημ\widehat{Γ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία } \widehat{Γ}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$συν\widehat{Γ} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία } \widehat{Γ}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Παρατηρούμε ότι $ημ\widehat{B} = συν\widehat{Γ}$ και $ημ\widehat{Γ} = συν\widehat{B}$.

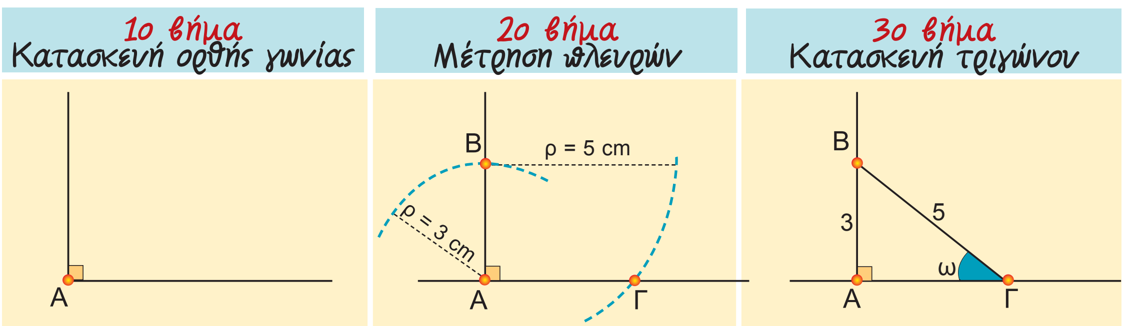
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιαστεί μία οξεία γωνία ω, με ημω = $\frac{3}{5}$.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει:

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}.$$

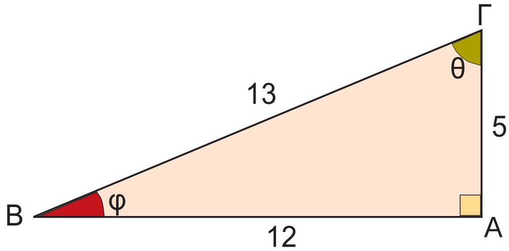
Επομένως, για να κατασκευάσουμε οξεία γωνία ω με $ημω = \frac{3}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 3 και η υποτείνουσά του ίση με 5.



Για τη γωνία ω ισχύει: $ημω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

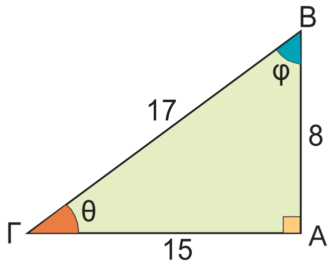


		Α	Β	Γ	Δ
α)	ημθ =	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$
β)	ημφ =	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{5}$
γ)	συνθ =	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{5}{13}$
δ)	συνφ =	$\frac{5}{13}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{13}{12}$

2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος ποιος από τους παρακάτω αριθμούς:

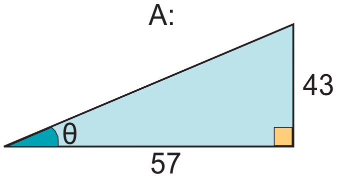
Α: συνθ Β: συνφ Γ: ημφ

ισούται με $\frac{8}{17}$;

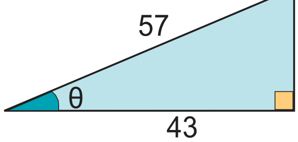


3. Σε ποιο από τα παρακάτω τρίγωνα ισχύει συνθ = $\frac{43}{57}$;

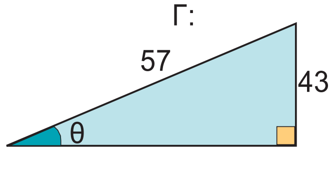
Α:



Β:



Γ:



4. Αν ημθ = $\frac{3}{5}$ και συνθ = $\frac{4}{5}$, τότε: εφθ = ... Α: $\frac{3}{4}$, Β: $\frac{4}{3}$, Γ: $\frac{5}{3}$, Δ: $\frac{5}{4}$

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

5. Να βάλετε σε κύκλο τις τιμές που δε μπορούν να εκφράζουν το συνημίτονο οξείας γωνίας:

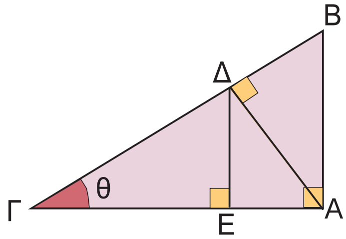
α) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ β) $-\frac{1}{2}$ γ) $\frac{2}{3}$ δ) $\frac{3}{2}$ ε) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ στ) 1,45

6. Δίνεται το διπλανό σχήμα. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω σχέσεις:

α) συνθ = $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ β) συνθ = $\frac{ΓΔ}{ΑΓ}$ γ) συνθ = $\frac{ΓΒ}{ΓΕ}$

δ) συνθ = $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ ε) συνθ = $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}$ στ) ημθ = $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$

ζ) ημθ = $\frac{ΔΕ}{ΓΔ}$ η) ημθ = $\frac{ΑΔ}{ΓΔ}$ θ) ημθ = $\frac{ΑΔ}{ΑΓ}$

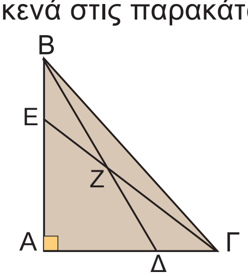


7. Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{Α}$ είναι ορθή. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω φράσεις:

α) Στο τρίγωνο .... είναι: συν $Α\hat{Δ}Β$ = $\frac{.......}{.......}$.

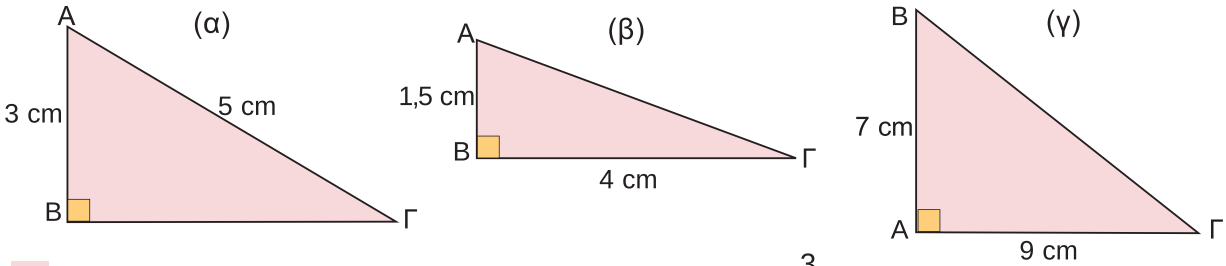
β) Στο τρίγωνο .... είναι: ημ $Α\hat{Β}Γ$ = $\frac{.......}{.......}$.

γ) Στο τρίγωνο .... είναι: συν......... = $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

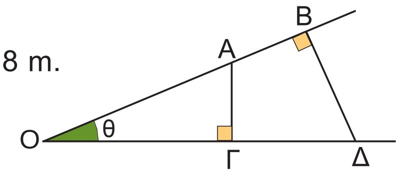
1 Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των οξειών γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.



2 Δίνεται μια οξεία γωνία ω για την οποία ισχύει συνω = $\frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε το ημω.

3 Δίνεται μια οξεία γωνία ω. Να αποδείξετε ότι:
α) 2 + 5ημω < 7 β) 4 – 2συνω > 2 γ) 5ημω + 3συνω < 8

4 Στο διπλανό σχήμα είναι: ΟΑ = 10 m, ΟΒ = 12 m και ΟΓ = 8 m.
Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΟΔ, ΑΓ και ΒΔ.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ

Αστρολάβος είναι ένα αστρονομικό όργανο που εφευρέθηκε από τον έλληνα αστρονόμο Ίππαρχο τον 2ο αιώνα π.Χ. για να μετρήσει το ύψος ενός αστεριού πάνω από τον ορίζοντα, καθώς και τη γωνιακή απόσταση δύο αστεριών.

Στην πρώτη του μορφή ο αστρολάβος ήταν ένας ξύλινος δίσκος, στο κυκλικό πλαίσιο του οποίου ήταν χαραγμένες οι υποδιαιρέσεις του σε μοίρες και μια ακτίνα που έδειχνε το μηδέν (αρχή) των υποδιαιρέσεων.

Στο κέντρο του δίσκου ήταν στερεωμένος ένας κανόνας (χάρακας), που μπορούσε να περιστρέφεται και με τον οποίο γινόταν η στόχευση του αστεριού.

Αργότερα οι αστρολάβοι έγιναν μεταλλικοί, με παραστάσεις από ζωδιακό κύκλο και κάποιους αστρονομικούς χάρτες. Ήταν το κυριότερο όργανο ναυσιπλοΐας κατά τον μεσαίωνα και αντικαταστάθηκε από τον εξάντα τον 18ο αιώνα.

Σήμερα οι αστρολάβοι είναι αστρονομικά όργανα μεγίστης ακρίβειας, εφοδιασμένα με διόπτρα μπροστά από την οποία είναι προσαρμοσμένο ένα πρίσμα. Προσδιορίζουν τη χρονική στιγμή κατά την οποία ένα συγκεκριμένο αστέρι βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα σε ορισμένο ύψος, συνήθως 45° ή 60°.

Στη γαλλική αυτή μικρογραφία του 13ου αιώνα τρεις μοναχοί παρατηρούν με έναν αστρολάβο κάποιο αστέρι.

2.3. Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

Η χρήση του υπολογιστή τσέπης για τον υπολογισμό του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας ω

Επειδή ο υπολογισμός του ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης μιας γωνίας δεν είναι απλός, χρησιμοποιούμε συχνά έναν «επιστημονικό» υπολογιστή τσέπης. Ο «επιστημονικός» υπολογιστής περιλαμβάνει τα πλήκτρα **sin**, **cos** και **tan**.

Το πρώτο υπολογίζει το ημίτονο, το δεύτερο το συνημίτονο και το τρίτο την εφαπτομένη μίας γωνίας (π.χ. των 63°) ως εξής:

α) Πατάμε το πλήκτρο που μετατρέπει τους αριθμούς σε μοίρες. Το πλήκτρο αυτό διαφέρει από υπολογιστή σε υπολογιστή. Συνήθως η ένδειξη που φανερώνει ότι έχουμε πατήσει το σωστό πλήκτρο είναι DEG.

β) Πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα:

6 **3** **sin** ή **sin** **6** **3** που υπολογίζει το ημ63°.

γ) Στην οθόνη παρουσιάζεται ο αριθμός 0,891 που είναι το ημ63°.

δ) Ανάλογα πατώντας τα πλήκτρα:

6 **3** **cos** ή **cos** **6** **3** έχουμε ότι: συν63° = 0,454 και

6 **3** **tan** ή **tan** **6** **3** έχουμε ότι: εφ63° = 1,963.

Παρατήρηση:

Στο τέλος του βιβλίου (σελ. 254) μπορείτε να βρείτε έναν πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 1° έως 89°, για να τον χρησιμοποιήσετε στις ασκήσεις.

Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης οξείας γωνίας ω

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν μεταβάλλεται η γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

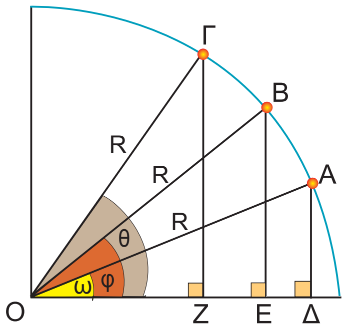
Χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης ή τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	28°	47°	68°	83°
ημίτονο				
συνημίτονο				
εφαπτομένη				

Λύση

Βρίσκουμε ότι:

	28°	47°	68°	83°
ημίτονο	0,469	0,731	0,927	0,992
συνημίτονο	0,883	0,682	0,375	0,122
εφαπτομένη	0,532	1,072	2,475	8,144



Από τον προηγούμενο πίνακα παρατηρούμε ότι:

Όταν μια οξεία γωνία αυξάνεται, τότε: **αυξάνεται το ημίτονό της, ελαττώνεται το συνημίτονό της και αυξάνεται η εφαπτομένη της.**

Γεωμετρικά, τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στα διπλανά σχήματα:

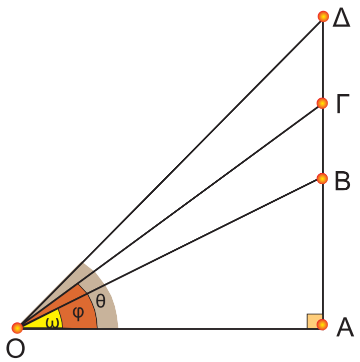
Σχηματίζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ, με σταθερή υποτείνουσα R = ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ και θεωρούμε τρεις γωνίες: $\omega < \varphi < \theta$.

Παρατηρούμε ότι: ΑΔ < ΒΕ < ΓΖ.

Επομένως, διαιρώντας με R έχουμε ότι: $\frac{\text{ΑΔ}}{R} < \frac{\text{ΒΕ}}{R} < \frac{\text{ΓΖ}}{R}$ ή **ημω < ημφ < ημθ**.

Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι: ΟΔ > ΟΕ > ΟΖ.

Οπότε: $\frac{\text{ΟΔ}}{R} > \frac{\text{ΟΕ}}{R} > \frac{\text{ΟΖ}}{R}$ ή **συνω > συνφ > συνθ**.



Ας θεωρήσουμε ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΑΔ με σταθερή τη μία κάθετη πλευρά ΟΑ και ορθή τη γωνία $\hat{\text{Α}}$.

Παρατηρούμε ότι, όταν η οξεία γωνία με κορυφή το σημείο Ο μεγαλώνει, δηλαδή: $\omega < \varphi < \theta$, τότε μεγαλώνει αντίστοιχα η απέναντι κάθετη πλευρά: ΑΒ < ΑΓ < ΑΔ.

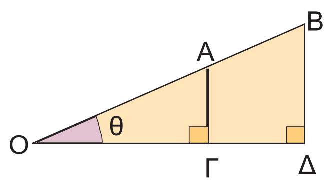
Επομένως: $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΟΑ}} < \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΟΑ}} < \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΟΑ}}$ ή **εφω < εφφ < εφθ.**

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = 5 cm, ΟΒ = 8 cm και ΑΓ = 2 cm. Να υπολογίσετε την απόσταση ΒΔ.



Λύση: Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν δύο ορθογώνια τρίγωνα, τα ΟΑΓ και ΟΒΔ με κοινή γωνία θ.

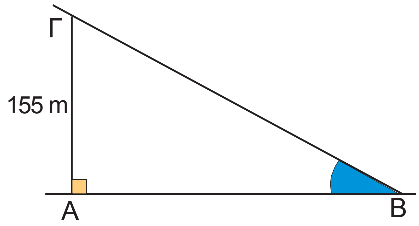
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε: ημθ = $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΟΑ}}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ έχουμε: ημθ = $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΟΒ}}$.

Άρα, θα ισχύει ότι: $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΟΒ}}$ οπότε: $\text{ΒΔ} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΟΑ}} \cdot \text{ΟΒ}$ ή $\text{ΒΔ} = \frac{2}{5} \cdot 8 = \frac{16}{5} = 3{,}2$ (cm).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζει μια πίστα του σκι με το οριζόντιο επίπεδο είναι ημ$\hat{B}$ = 0,31. Αν ένας σκιέρ βρίσκεται σε σημείο Γ ύψους ΑΓ = 155 m από το έδαφος, να βρεθεί η απόσταση ΒΓ που θα διανύσει ο σκιέρ ώσπου να φτάσει στο έδαφος.

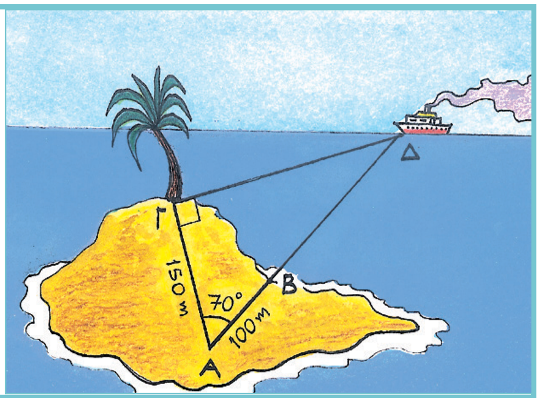


Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) πρέπει να βρούμε την πλευρά (υποτείνουσα) ΒΓ γνωρίζοντας ότι: ΑΓ = 155 m και ημ$\hat{B}$ = 0,31.

Έχουμε ότι: ημ$\hat{B}$ = $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ ή ΒΓ = $\frac{ΑΓ}{ημ\hat{B}}$ ή ΒΓ = $\frac{155}{0,31}$ ή ΒΓ = 500 m.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένας παρατηρητής Α, που βρίσκεται 100 m από την ακτή Β και 150 m από ένα δέντρο Γ, θέλει να υπολογίσει την απόσταση ΒΔ του πλοίου Δ από την ακτή Β. Μ' ένα γωνιόμετρο (ένα όργανο που μας επιτρέπει να μετράμε γωνίες) σκοπεύει το πλοίο και το δέντρο και βρίσκει τη γωνία Δ$\hat{Α}$Γ=70°. Αν $\hat{Γ}$ = 90°, να υπολογίσετε την απόσταση ΔΒ.



Λύση: Έστω x = ΒΔ η απόσταση του πλοίου από την ακτή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ χρησιμοποιούμε το συνημίτονο της γωνίας των 70°.

Είναι: συν70° = $\frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{150}{100 + x}$

Μ' έναν επιστημονικό υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε: συν70° = 0,34, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται $0,34 = \frac{150}{100 + x}$ και έχουμε:

$$(100 + x) \cdot 0,34 = 150 \quad ή$$

$$34 + 0,34\,x = 150 \quad ή$$

$$0,34\,x = 150 - 34 \quad ή$$

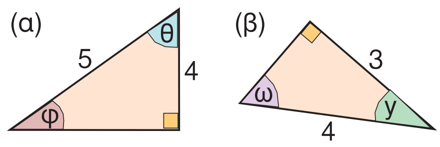
$$x = \frac{116}{0,34} = 341,18 \text{ (m)}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις που αφορούν τις γωνίες των διπλανών ορθογωνίων τριγώνων:

α) Α: $\varphi < \theta$ Β: $\varphi = \theta$ Γ: $\varphi > \theta$

β) Α: $\omega < y$ Β: $\omega = y$ Γ: $\omega > y$

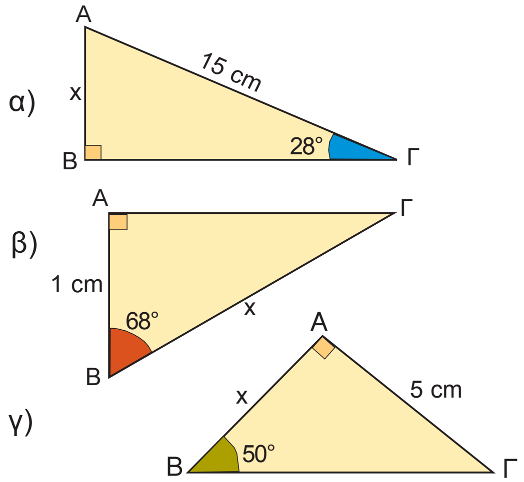


2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λανθασμένο).

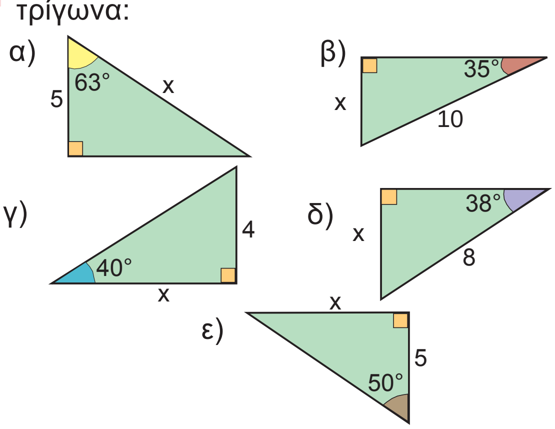
	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) ημ13° < ημ15°		
β) συν13° < συν15°		
γ) συν57° < συν27°		
δ) ημ57° < ημ27°		
ε) ημ32° < ημ23°		
στ) συν32° < συν23°		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

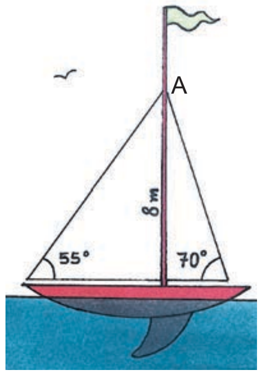
1 Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα:



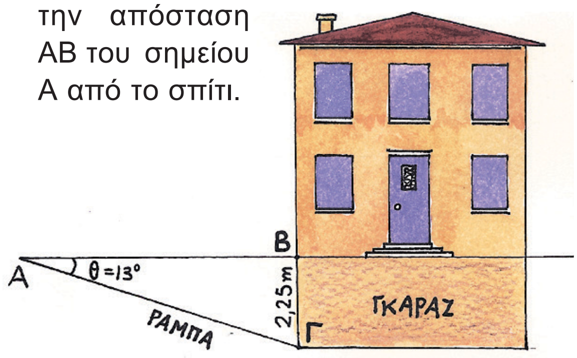
2 Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω τρίγωνα:



3 Σ' ένα ιστιοπλοϊκό σκάφος το ύψος του καταρτιού έως το σημείο Α είναι 8 m. Να βρείτε το μήκος που έχουν τα συρματόσχοινα που στηρίζουν τα πανιά, αν αυτά σχηματίζουν γωνίες 55° και 70° αντίστοιχα με το επίπεδο της θάλασσας.

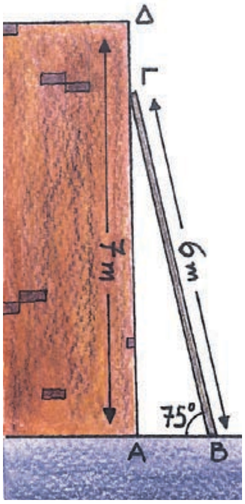


4 Ένας μηχανικός θέλει να κατασκευάσει ένα σπίτι με υπόγειο γκαράζ. Το ύψος του γκαράζ πρέπει να είναι ΒΓ = 2,25 m και η κλίση της ράμπας θ = 13°.
Να βρείτε το μήκος ΑΓ της ράμπας και την απόσταση ΑΒ του σημείου Α από το σπίτι.

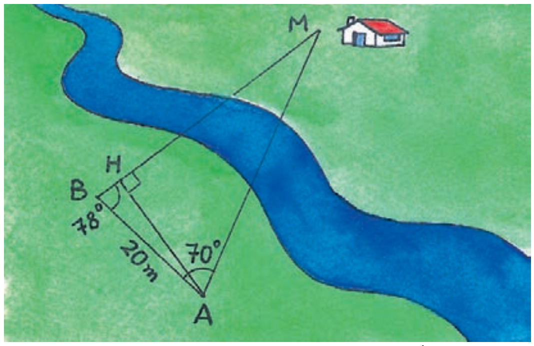


5 Να διατάξετε από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (χωρίς να τους υπολογίσετε):
α) ημ37°, ημ56°, ημ16° και ημ20°
β) συν25°, συν36°, συν20° και συν28°
γ) εφ18°, εφ22°, εφ51° και εφ89°

6 Μια σκάλα ύψους 6 m είναι ακουμπισμένη σε τοίχο ύψους 7 m. Για λόγους ασφαλείας, η γωνία στο έδαφος πρέπει να είναι 75°. Να βρείτε την απόσταση ΑΒ όπου πρέπει να τοποθετηθεί η βάση της σκάλας από τον τοίχο, καθώς και την απόσταση ΓΔ από το πάνω μέρος της σκάλας έως το πάνω μέρος του τοίχου.

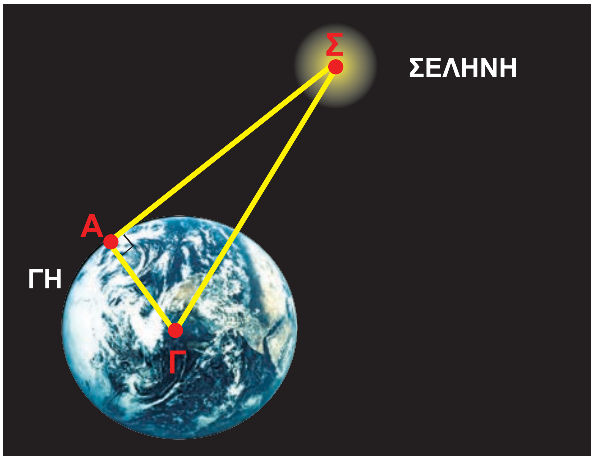


7 Ένας γεωλόγος θέλει να υπολογίσει την απόσταση από το σημείο Α, όπου βρίσκεται, μέχρι το σπίτι Μ στην άλλη πλευρά ενός ποταμού. Χρησιμοποιεί ένα γειτονικό σημείο Β που βρίσκεται σε απόσταση ΑΒ = 20 m και με τη βοήθεια



ενός γωνιόμετρου βρίσκει ότι $\widehat{ABM} = 78°$ και $\widehat{BAM} = 70°$. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΑΗ και ΑΜ.

8 Η ακτίνα της Γης είναι R=ΓΑ=6371 km και η γωνία $\widehat{A\Gamma\Sigma}$ είναι 89,05°. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος την απόσταση Γης - Σελήνης (ΓΣ).

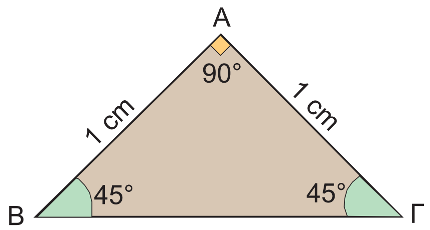


2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45°

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 1 cm. Τότε οι γωνίες της βάσης του είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45°$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ45°, συν45° και εφ45°.



Λύση

Από το Πυθαγόρειο θέωρημα έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, άρα $B\Gamma = \sqrt{2}$.

Επομένως: $ημ45° = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

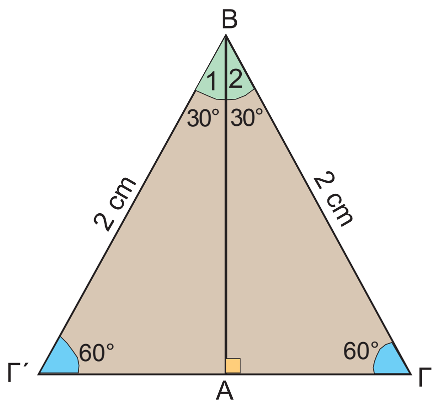
$$συν45° = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$εφ45° = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° και 60°

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΓ΄ με κοινή πλευρά την ΑΒ, οξείες γωνίες $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30°$ και υποτείνουσες ΒΓ = ΒΓ΄ = 2 cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ30°, συν30°, εφ30°, ημ60°, συν60° και εφ60°.



Λύση

Το τρίγωνο ΒΓΓ΄ είναι ισόπλευρο, αφού όλες οι γωνίες του είναι 60°, οπότε:

ΓΓ΄ = 2 cm και ΑΓ = ΑΓ΄ = 1 cm.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$ημ\hat{B}_2 = ημ30° = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{1}{2}$.

Για να υπολογίσουμε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}_2 = 30°$, θα υπολογίσουμε πρώτα την πλευρά ΑΒ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, οπότε $AB = \sqrt{3}$.

Επομένως: $συν\hat{B}_2 = συν30° = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ακόμα: } εφ\widehat{B}_2 = εφ30° = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επίσης, στο ίδιο σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας $\widehat{Γ} = 60°$:

$$ημ\widehat{Γ} = ημ60° = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad συν\widehat{Γ} = συν60° = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{1}{2} \quad \text{και}$$

$$εφ\widehat{Γ} = εφ60° = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω έχουμε τον πίνακα:

	30°	**45°**	**60°**
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $ημ^2 45° = 1 - ημ30°$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $ημ45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $ημ^2 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $ημ30° = \frac{1}{2}$, οπότε $1 - ημ30° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Επομένως $ημ^2 45° = 1 - ημ30° = \frac{1}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

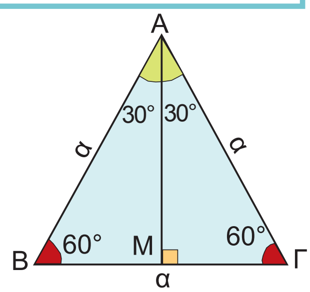
Να αποδείξετε ότι το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, δίνονται από τους τύπους: $υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$ και $Ε = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$.

Λύση: Φέρνουμε το ύψος ΑΜ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$ημ\widehat{B} = ημ60° = \frac{ΑΜ}{ΑΒ}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{υ}{α}$ ή $υ = α \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου είναι:

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}α \cdot υ = \frac{1}{2}α \cdot α \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $Α = ημ30° + συν60° + 2συν30° - 2εφ45° + 2ημ45°$.

Λύση: Έχουμε: $Α = ημ30° + συν60° + 2συν30° - 2εφ45° + 2ημ45°$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε κάθε αριθμό της στήλης Α να αντιστοιχίσετε τον ίσο του αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) συν60°	i) $\frac{1}{2}$
β) ημ45°	ii) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
γ) ημ30°	iii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
δ) ημ60°	iv) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
ε) συν45°	v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
στ) συν30°	

2. Αν ημθ = συνθ, όπου θ οξεία γωνία, τότε:
Α: θ = 30° Β: θ = 45° Γ: θ = 60° Δ: θ = 90°
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

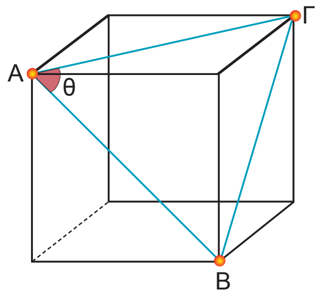
	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) ημ60° = 2ημ30°		
β) 2συν60° = 1		
γ) ημ45° + συν45° = 2ημ45°		
δ) συν30° = ημ60°		
ε) συν60° = ημ30°		

4. Στον διπλανό κύβο για τη γωνία $\theta = B\widehat{A}\Gamma$, ισχύει ότι:

Α: $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ Β: $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Γ: $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Δ: συνθ = 1

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

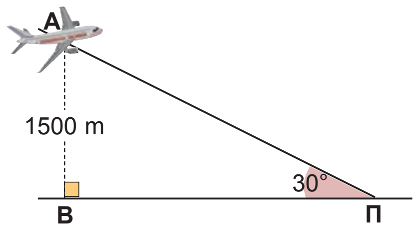
1 Να υπολογίσετε τις πλευρές α και β ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 30°$, γ = 5 cm.
β) $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 45°$, γ = 7 cm.

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = 5 cm, ΑΓ = 13 cm.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
β) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\widehat{A}$ και το $\sigma\upsilon\nu\widehat{A}$.

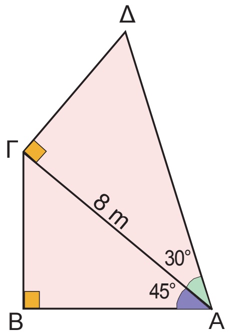
3 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:
α) $\eta\mu^2 30° + \eta\mu^2 45° + \eta\mu^2 60° = \frac{3}{2}$.
β) $2\eta\mu^2 30° + 2\sigma\upsilon\nu^2 60° - 2\eta\mu^2 45° = 0$.

4 Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = 2\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu\omega$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) ω = 30° β) ω = 45° γ) ω = 60°

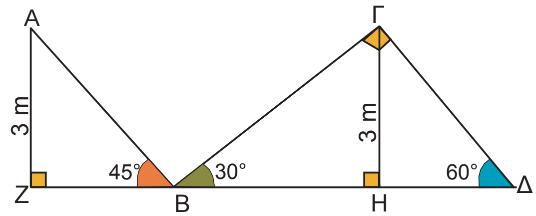
5 Ένα αεροπλάνο Α πετά σε ύψος 1500m και φαίνεται από τον πύργο ελέγχου του αεροδρομίου με γωνία 30°. Ποια είναι η οριζόντια απόσταση ΠΒ από τον πύργο ελέγχου;



6 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΑΒ και ΑΔ.

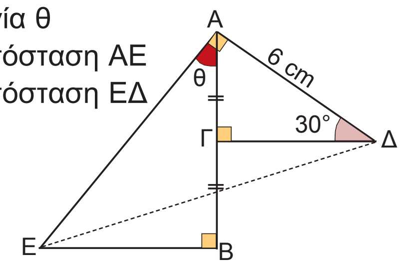


7 Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα.

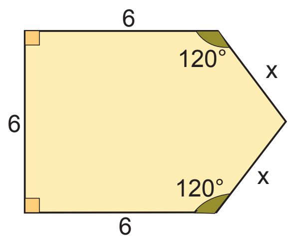


8 Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Γ είναι μέσο του ΑΒ. Να υπολογίσετε:

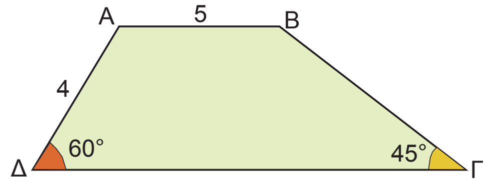
α) τη γωνία θ
β) την απόσταση ΑΕ
γ) την απόσταση ΕΔ



9 Να υπολογίσετε την περίμετρο του διπλανού σχήματος.

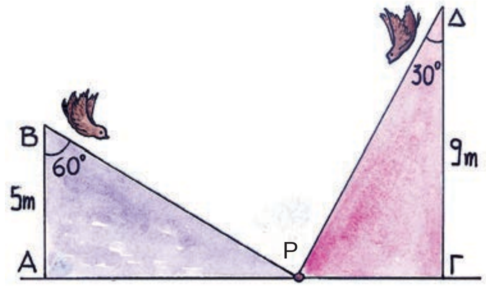


10 Στο παρακάτω τραπέζιο ΑΒΓΔ να υπολογίσετε το μήκος της μεγάλης βάσης ΓΔ.

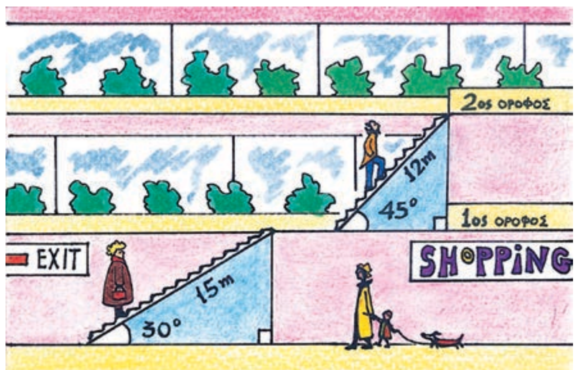


11 ***Σε μια ρώγα από σταφύλι...***

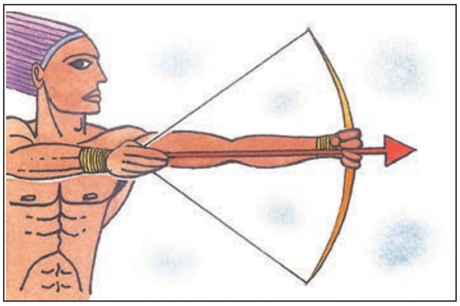
Δύο σπουργίτια βρίσκονται στην κορυφή δύο στύλων ύψους 5 m και 9 m αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ξεκινούν την ίδια στιγμή και με την ίδια ταχύτητα με στόχο μια ρώγα από σταφύλι που βλέπουν υπό γωνίες 60° και 30° στο έδαφος στο σημείο Ρ. Ποιο από τα δύο σπουργίτια θα φτάσει πρώτο τη ρώγα;



12 Για ν' ανέβουμε στον 2ο όροφο ενός εμπορικού κέντρου χρησιμοποιούμε τις κυλιόμενες σκάλες, όπως βλέπουμε στο σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του 2ου ορόφου από το έδαφος.



2.5. Η έννοια του διανύσματος



Χαρακτηριστικά στοιχεία ενός διανύσματος

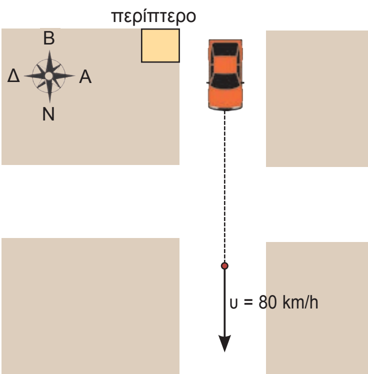
Όταν μετράμε ένα μέγεθος, όπως π.χ. τον χρόνο που χρειαζόμαστε για να διαβάσουμε αυτή την παράγραφο, γράφουμε τη μέτρηση ως έναν αριθμό που ακολουθείται συνήθως από μία μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, χρειαζόμαστε 30 δευτερόλεπτα για να διαβάσουμε την παράγραφο αυτή. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο t για τον χρόνο, γράφουμε: t = 30 (s).

Μερικά μεγέθη προσδιορίζονται πλήρως, αν δοθεί μόνο το μέτρο τους. Για παράδειγμα: ο χρόνος, που εκφράζεται σε ώρες, λεπτά, δευτερόλεπτα κ.τ.λ., η θερμοκρασία που εκφράζεται σε βαθμούς Κελσίου, Φαρενάιτ κ.τ.λ., η μάζα που εκφράζεται σε χιλιόγραμμα, γραμμάρια κ.τ.λ.

Τέτοια μεγέθη λέγονται **βαθμωτά** ή **μονόμετρα μεγέθη**. Όμως, δεν είναι όλα τα μεγέθη μονόμετρα. Υπάρχουν και άλλα, που εκτός από μέτρο έχουν και κατεύθυνση. Ένα παράδειγμα τέτοιου μεγέθους είναι το παρακάτω:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Αντώνης συζητά με τον Βαγγέλη για ένα αυτοκίνητο που πέρασε από μπροστά του την ώρα που βρισκόταν σε ένα σταυροδρόμι, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Αντώνης: Άσε, Βασίλη, πέρασε από μπροστά μου ένα αυτοκίνητο σαν σίφουνας! Πρέπει να έτρεχε τουλάχιστον με 100 χιλιόμετρα την ώρα.
Βαγγέλης: Καλά, προς τα πού πήγαινε τόσο γρήγορα;
Μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου;



Λύση

Για να προσδιορίσουμε πλήρως την κίνηση του αυτοκινήτου, πρέπει να γνωρίζουμε:

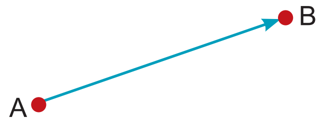
α) Από ποιο σημείο ξεκίνησε το αυτοκίνητο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι ξεκίνησε από το περίπτερο.

β) Προς ποια κατεύθυνση ή αλλιώς με ποια φορά κινείται; Στο σχήμα φαίνεται ότι κινείται νότια.

γ) Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται. Εδώ, το μέτρο της ταχύτητας είναι 80 km/h.

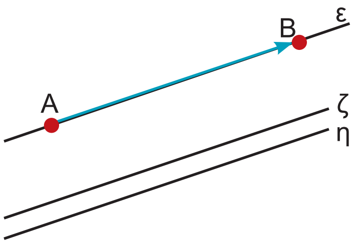
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι δεν αρκεί να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο της ταχύτητας (80 km/h) αλλά για να καταλάβουμε προς τα πού κινείται το αυτοκίνητο, χρειάζεται η αρχική του θέση και η κατεύθυνσή του.

Μεγέθη, όπως η ταχύτητα, που έχουν μέτρο και κατεύθυνση, ονομάζονται διανυσματικά μεγέθη.



Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με **διανύσματα** που συμβολίζονται με βέλη έχοντας ένα σημείο Α που είναι η **αρχή** και λέγεται σημείο εφαρμογής του διανύσματος και ένα σημείο Β που είναι το **πέρας** (τέλος) του διανύσματος.

Το διάνυσμα, τότε, συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.

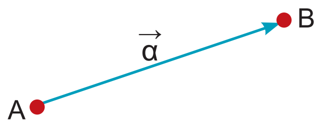


Ένα διάνυσμα έχει τα εξής στοιχεία:

α) **Διεύθυνση**, την ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.

β) **Φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β ($\overrightarrow{AB}$) ή αρχή το Β και πέρας το Α ($\overrightarrow{BA}$).

γ) **Μέτρο**, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας αριθμός θετικός ή μηδέν.



Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την κατεύθυνση ενός διανύσματος.

Παρατήρηση:

Συχνά για ευκολία συμβολίζουμε τα διανύσματα με μικρά γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$,...

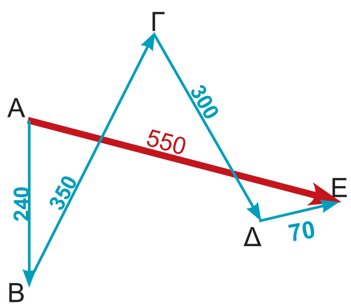
Τα διανύσματα παίζουν βασικό ρόλο στη Φυσική. Εκτός από τη μετατόπιση και την ταχύτητα άλλα διανυσματικά μεγέθη είναι η επιτάχυνση, η δύναμη, το βαρυτικό, το ηλεκτρικό, το μαγνητικό πεδίο κ.ά.

Μέτρο διανύσματος

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του μέτρου του διανύσματος, αρκεί να καταλάβουμε τη διαφορά μεταξύ απόστασης και μετατόπισης. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ένα πλοίο του Πολεμικού Ναυτικού συμμετέχει σε μια άσκηση. Αποπλέει αρχικά από τη Σαλαμίνα (Α) και σταματάει διαδοχικά σε τέσσερα προκαθορισμένα σημεία ανεφοδιασμού (Β), (Γ), (Δ) και (Ε). Διανύοντας τις αποστάσεις που φαίνονται στον πίνακα,



Διαδρομή	Απόσταση
(Α) → (Β)	240 ναυτικά μίλια
(Β) → (Γ)	350 ναυτικά μίλια
(Γ) → (Δ)	300 ναυτικά μίλια
(Δ) → (Ε)	70 ναυτικά μίλια

ποια είναι η συνολική απόσταση που διένυσε το πλοίο και ποια είναι η απόσταση της αρχικής και της τελικής του θέσης;

Λύση

Η συνολική απόσταση που διένυσε το πλοίο είναι:
$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{B\Gamma}| + |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| + |\overrightarrow{\Delta E}| = 240 + 350 + 300 + 70 = 960$ ναυτικά μίλια.
Η απόσταση της αρχικής και τελικής του θέσης είναι:
$|\overrightarrow{AE}| = 550$ ναυτικά μίλια.

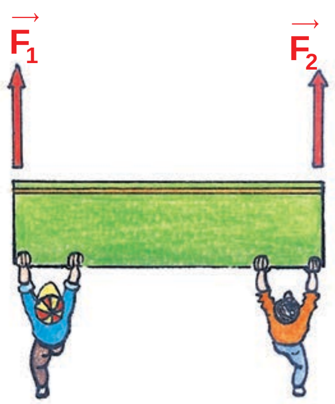
Η απόσταση είναι **βαθμωτό (αριθμητικό) μέγεθος**. Λέμε, π.χ. ότι το πλοίο διένυσε απόσταση 960 ναυτικών μιλίων, αλλά δεν ξέρουμε πού πήγε.

Ποια είναι όμως η μετατόπιση του πλοίου;
Η μετατόπιση είναι **διανυσματικό** μέγεθος. Λέμε, π.χ. ότι το πλοίο ξεκίνησε από τη Σαλαμίνα και μετατοπίστηκε 240 ναυτικά μίλια προς Νότο, οπότε ξέρουμε ακριβώς από πού ξεκίνησε και πού κατέληξε. Η τελική μετατόπιση του πλοίου εκφράζεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$, καθώς μας ενδιαφέρει η αρχική και η τελική θέση του πλοίου.
Ας προσέξουμε ιδιαίτερα ότι το μέτρο της μετατόπισης $\overrightarrow{AE}$ είναι $|\overrightarrow{AE}| = 550$ ναυτικά μίλια και δεν έχει καμία σχέση με τη συνολική απόσταση που διένυσε από τη Σαλαμίνα έως το τελευταίο σημείο ανεφοδιασμού (960 ναυτικά μίλια).

Ίσα και αντίθετα διανύσματα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Σε μια μετακόμιση ο Μιχάλης και ο Γρηγόρης προσπαθούν να μετακινήσουν ένα θρανίο σπρώχνοντάς το από τα δύο άκρα του, όπως φαίνεται στο σχήμα, σε μια παράλληλη θέση.
Τι νομίζετε ότι ισχύει για τις δυνάμεις που εφαρμόζει ο Μιχάλης και ο Γρηγόρης στα άκρα του θρανίου;



Λύση

Όπως καταλαβαίνουμε τα διανύσματα $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ θα είναι ίσα.

Δύο διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα.

Ας θυμηθούμε ένα παιχνίδι που παίζεται συχνά στις παραλίες ή στις κατασκηνώσεις. Δύο ομάδες παιδιών αρχίζουν να τραβάνε ένα σχοινί προς αντίθετη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ακριβώς στη μέση του σχοινιού υπάρχει μια γραμμή. Αν μία ομάδα καταφέρει να τραβήξει τον πρώτο παίκτη της άλλης ομάδας μετά τη γραμμή, τότε η ομάδα κερδίζει.
Βλέπουμε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται από τις δύο ομάδες,

όταν παραμένουν ακίνητες, αλληλοεξουδετερώνονται ή όπως λέμε, είναι αντίθετες.

Δύο διανύσματα είναι αντίθετα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

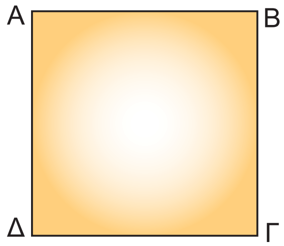
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται το διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ. Ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{A\Delta}$,

α) έχουν ίσα μέτρα;

β) είναι ίσα;

γ) είναι αντίθετα;



Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι οι πλευρές ενός τετραγώνου έχουν το ίδιο μήκος. Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ έχουν ίσα μέτρα.
Δηλαδή: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| = |\overrightarrow{\Delta A}| = |\overrightarrow{A\Delta}|$.

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι ίσα, γιατί έχουν ίδια διεύθυνση και φορά και ίσα μέτρα. Ομοίως, τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι ίσα.
Δηλαδή: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$.

γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γιατί έχουν ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά. Ομοίως τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Delta A}$ είναι αντίθετα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο παραπάνω σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων είναι ίσες με 1 cm. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$, $\overrightarrow{\Theta Z}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{P\Delta}$, $\overrightarrow{T\Lambda}$, $\overrightarrow{K\Theta}$, $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{AZ}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$. Ποια από τα διανύσματα αυτά είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;

Λύση: Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΒ είναι 2 cm. Δηλαδή: $|\overrightarrow{OB}| = 2$.
Ομοίως βρίσκουμε: $|\overrightarrow{O\Gamma}| = 3$, $|\overrightarrow{\Gamma\Lambda}| = 5$, $|\overrightarrow{\Theta Z}| = 2$, $|\overrightarrow{\Delta A}| = 3$, $|\overrightarrow{P\Delta}| = 9$, $|\overrightarrow{T\Lambda}| = 5$, $|\overrightarrow{K\Theta}| = 9$, $|\overrightarrow{NA}| = 5$, $|\overrightarrow{BH}| = 5$ και $|\overrightarrow{PK}| = 4$.

Ίσα διανύσματα είναι τα: $\overrightarrow{T\Lambda} = \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BH}$ και $\overrightarrow{P\Delta} = \overrightarrow{K\Theta}$.
Αντίθετα είναι τα: $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ και $\overrightarrow{T\Lambda}$, $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ και $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ και $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{\Delta A}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{\Theta Z}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

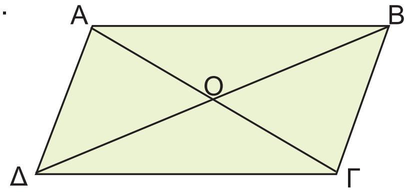
α) $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΔΓ}$

β) $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΒΔ}$

γ) $\overrightarrow{ΑΟ} = \overrightarrow{ΟΔ}$

δ) $\overrightarrow{ΟΑ} = \overrightarrow{ΟΓ}$

ε) $\overrightarrow{ΟΑ} = \overrightarrow{ΟΒ}$



2. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;

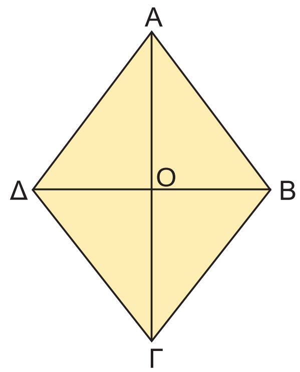
α) $\overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΒΓ}$

β) $|\overrightarrow{ΑΔ}| = |\overrightarrow{ΑΒ}|$

γ) $|\overrightarrow{ΟΑ}| = |\overrightarrow{ΟΒ}|$

δ) $\overrightarrow{ΔΑ} = \overrightarrow{ΒΑ}$

ε) $\overrightarrow{ΟΔ} = \overrightarrow{ΟΒ}$

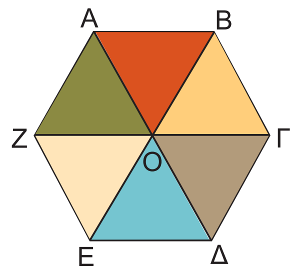


3. Στο διπλανό εξάγωνο όλα τα τρίγωνα διαφορετικού χρώματος είναι ισόπλευρα. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{Ε...} = \overrightarrow{...Γ} = \overrightarrow{...Ο}$

β) $\overrightarrow{ΑΖ} = \overrightarrow{Β...} = \overrightarrow{...Δ} = \overrightarrow{...Ε}$

γ) $|\overrightarrow{ΒΓ}| = |\overrightarrow{Ε...}| = |\overrightarrow{Ε...}| = |\overrightarrow{Ε...}|$



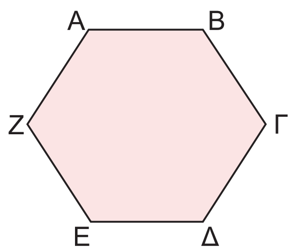
4. Ποια από τα παρακάτω μεγέθη χρειάζονται ένα διάνυσμα για να παρασταθούν;

α) βάρος β) ύψος γ) μάζα δ) ταχύτητα

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

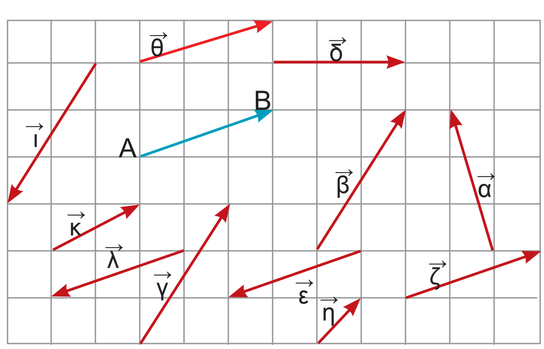
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο εξάγωνο του διπλανού σχήματος όλες οι πλευρές είναι ίσες.

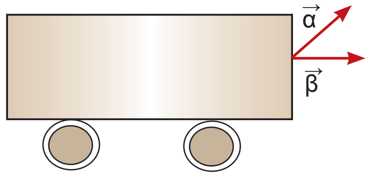


Από τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$, $\overrightarrow{ΕΔ}$, $\overrightarrow{ΕΖ}$ και $\overrightarrow{ΑΖ}$ ποια είναι ίσα και ποια αντίθετα;

2 Ποια από τα διανύσματα του σχήματος είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$; Ποια είναι αντίθετα με το $\overrightarrow{ΑΒ}$;



3 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του παρακάτω σχήματος έχουν ίσα μέτρα. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα αυτά είναι ίσα.

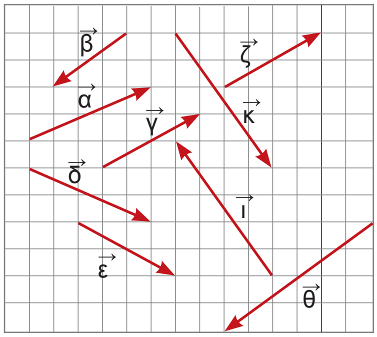


4 Ποια από τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος:

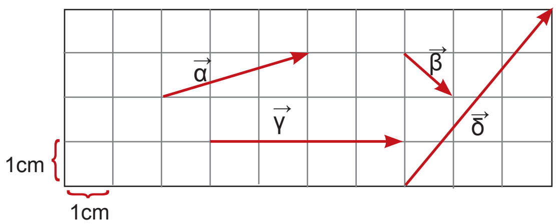
α) έχουν ίσα μέτρα;

β) είναι ίσα;

γ) είναι αντίθετα;



5 Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ του σχήματος.



6 Σ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Γ, ένα διάνυσμα $\vec{ΓΔ}$ αντίθετο του $\vec{AB}$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Δ, το διάνυσμα $\vec{ΔA}$.

Να αποδείξετε ότι το $\vec{ΔA}$ είναι αντίθετο του $\vec{BΓ}$.

7 Στη δοκό ΑΓ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{B}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$, $\vec{F_5}$.

Να βρείτε ποιες από αυτές:

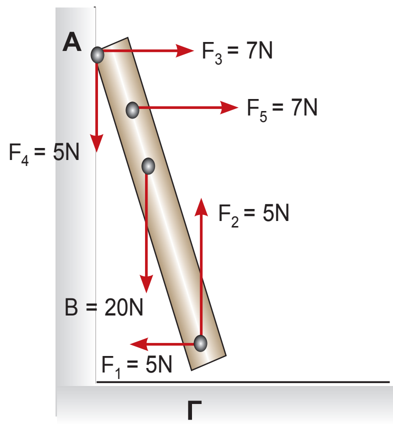
α) έχουν ίδια διεύθυνση

β) έχουν αντίθετη φορά

γ) είναι αντίθετες

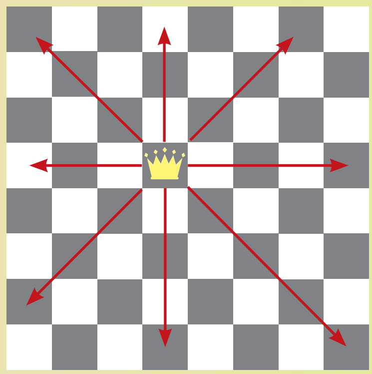
δ) είναι ίσες

ε) έχουν ίσα μέτρα

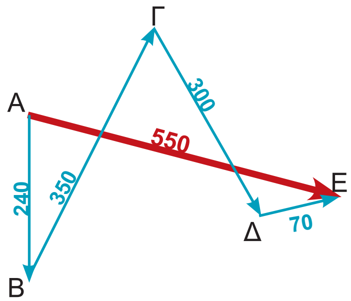


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο σκάκι, η βασίλισσα μπορεί να κινηθεί οριζόντια, κάθετα και διαγώνια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορείτε να τοποθετήσετε άλλες 4 βασίλισσες, έτσι ώστε, μαζί μ' αυτήν που έχει ήδη τοποθετηθεί, να καλύπτουν και τα 64 τετράγωνα του σκακιού;



2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

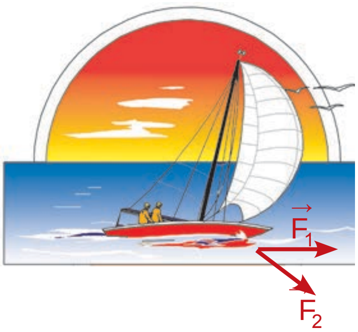


Άθροισμα διανυσμάτων

Στη δραστηριότητα 2 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε ότι η τελική μετατόπιση ήταν το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΕ}$. Οι διαδοχικές μετατοπίσεις ήταν τα διανύσματα: $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$, τα οποία λέγονται διαδοχικά διανύσματα, γιατί το τέλος του καθενός είναι η αρχή του επομένου. Είναι φανερό ότι το άθροισμα των διαδοχικών μετατοπίσεων ισούται με την τελική μετατόπιση, δηλαδή: $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΑΕ}$.
Με τον τρόπο αυτό ορίζεται το άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων. Τι γίνεται, όμως, όταν τα διανύσματα δεν είναι διαδοχικά; Ας δούμε ένα διαφορετικό παράδειγμα.

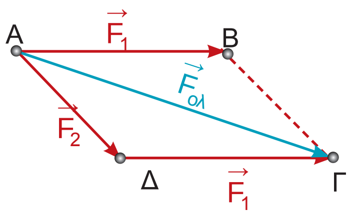
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Σέργιος είναι καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού, που έχει αναμμένη τη μηχανή του και κρατάει σταθερή πορεία. Χωρίς να ελέγξει την κατεύθυνση του ανέμου που φυσάει, σηκώνει το ένα πανί. Το ιστιοπλοϊκό αρχίζει να αλλάζει πορεία, καθώς ο άνεμος φυσά προς άλλη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Αν $\vec{F_1}$ είναι η δύναμη που ασκεί στο σκάφος η μηχανή και $\vec{F_2}$ η δύναμη που ασκεί στο σκάφος ο άνεμος, προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το ιστιοπλοϊκό;



Λύση

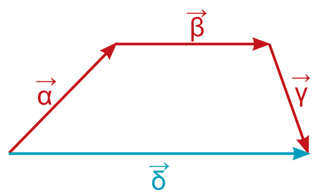
Έχουμε λοιπόν δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ (μηχανή) και $\vec{F_2}$ (άνεμος) που ασκούνται στο ιστιοπλοϊκό ταυτόχρονα και θέλουμε να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη, όπως λέμε στη Φυσική, δηλαδή το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$.



Μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα $\vec{F_1}$, έτσι ώστε να γίνει διαδοχικό με το $\vec{F_2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:
$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΑΓ} = \vec{F_{ολ}}$.
Οι δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ λέγονται **συνιστώσες** της $\vec{F_{ολ}}$.

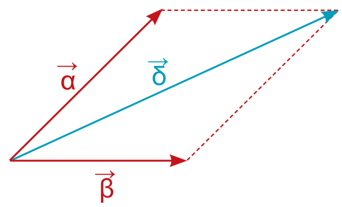
Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το $\vec{F_{ολ}}$ είναι να δούμε ότι αποτελεί τη διαγώνιο $\overrightarrow{ΑΓ}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επομένως, έχουμε δύο μεθόδους, για να βρίσκουμε το άθροισμα διανυσμάτων.



Α. Η μέθοδος του πολυγώνου

Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν όλα διαδοχικά.
Το άθροισμα των $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$, θα είναι το διάνυσμα $\vec{δ}$, που θα έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.



Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου

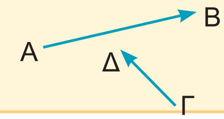
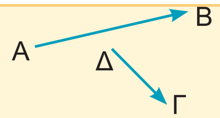
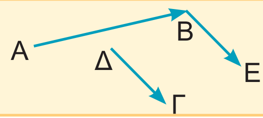
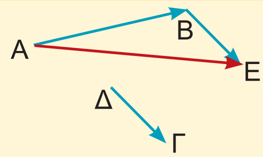
Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Η διαγώνιος $\vec{\delta}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

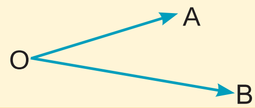
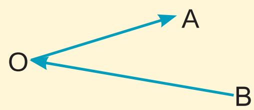
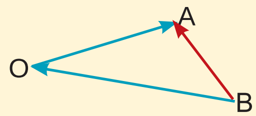
Διαφορά διανυσμάτων

Η διαφορά δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και ορίζεται ως άθροισμα του $\overrightarrow{AB}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$:

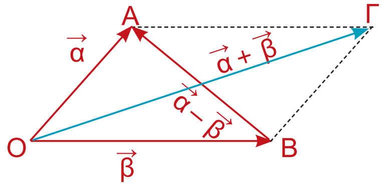
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα,	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	
προσθέτουμε στο $\overrightarrow{AB}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$	
Για να γίνει αυτό, σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BE}$ ίσο με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$	
Το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ από το $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta})$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ $= \overrightarrow{AE}$	

Διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα με κοινή αρχή,	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$	
προσθέτουμε στο $\overrightarrow{OA}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή το $\overrightarrow{BO}$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{BO}$ και $\overrightarrow{OA}$ είναι διαδοχικά.	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} =$ $= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$	
Το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{OB}$ από το $\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ $= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$ $= \overrightarrow{BA}$	

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η διαφορά $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ με κοινή αρχή Ο, είναι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, με αρχή το πέρας του δευτέρου και πέρας το πέρας του πρώτου.
Επομένως για τις διαγωνίους $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{BA}$ του διπλανού παραλληλογράμμου ισχύει: $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



Το μηδενικό διάνυσμα

Το άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το διάνυσμα αυτό λέγεται μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζεται με $\vec{0}$.
Επομένως, το μηδενικό διάνυσμα είναι ένα σημείο, οπότε δεν έχει ούτε διεύθυνση ούτε φορά. Το μέτρο του είναι ίσο με 0. Δηλαδή: $|\vec{0}| = 0$.

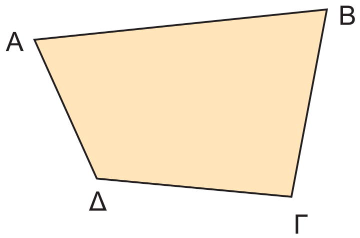
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Λύση: Έχουμε: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

Επίσης: $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

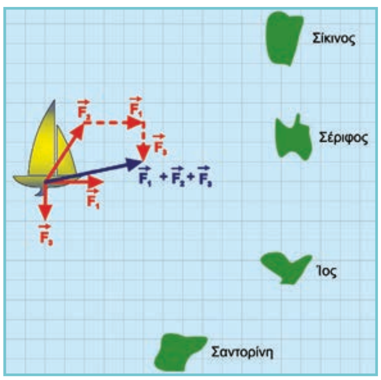
Επομένως: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Τρεις δυνάμεις ασκούνται στο ιστοπλοϊκό του παρακάτω σχήματος: η $\vec{F}_1$ από τη μηχανή του, η $\vec{F}_2$ από τα πανιά του (αέρας) και το ρεύμα της θάλασσας $\vec{F}_3$.
Σε ποιο νησί κατευθύνεται το ιστιοπλοϊκό;

Λύση: Το ιστιοπλοϊκό κινείται κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης των τριών αυτών δυνάμεων, δηλαδή του αθροίσματος $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.
Αν σχηματίσουμε το άθροισμα αυτών των δυνάμεων, η συνισταμένη τους δείχνει ότι το ιστιοπλοϊκό κατευθύνεται προς τη Σέριφο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

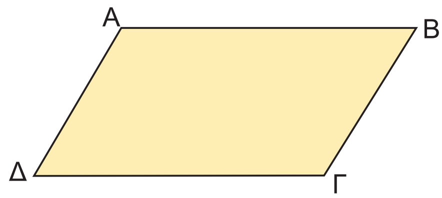
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει:
$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0}$.

Λύση: Έχουμε: $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta M} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{AM} = \vec{0}$



Το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ ισούται με το μηδενικό διάνυσμα, οπότε η αρχή και το πέρας ταυτίζονται. Επομένως, το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$, τότε:	Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.	Το Α είναι το μέσο του ΒΓ.	Το Β ταυτίζεται με το Γ.
β)	Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$, τότε:	Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.	Το Β είναι το μέσο του ΑΓ.	Το Α ταυτίζεται με το Γ.
γ)	Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε:	Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.	ΑΔ = ΒΓ	Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
δ)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{B\Gamma} =$	$\overrightarrow{A\Delta}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{A\Gamma}$
ε)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} =$	$\overrightarrow{\Gamma\Delta}$	$\overrightarrow{A\Delta}$	$\vec{0}$

2. Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{A\Delta}$

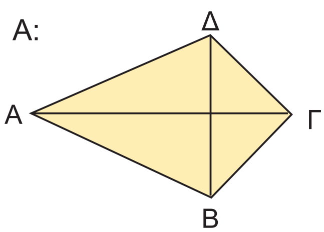
β) $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\Delta\ldots}$

γ) $\overrightarrow{\Gamma\ldots} - \overrightarrow{\Gamma\ldots} = \overrightarrow{AB}$

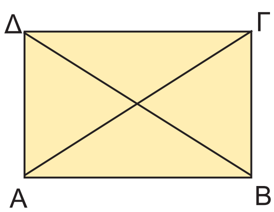
δ) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\ldots\ldots}$

3. Η ισότητα $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$ είναι σωστή σ' ένα μόνο από τα παρακάτω σχήματα. Μπορείτε να βρείτε σε ποιο;

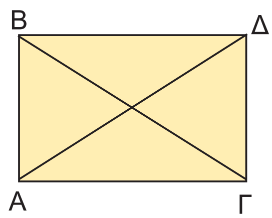
Α:



Β:

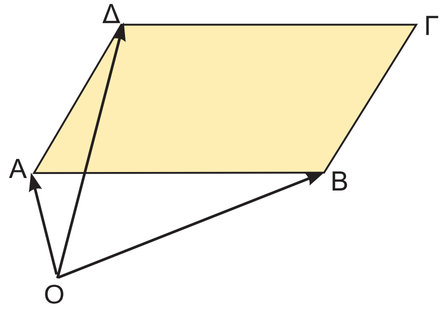


Γ:



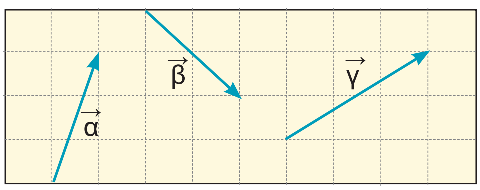
4. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις.

		Α	Β	Γ	Δ
α)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=$	$\overrightarrow{B\Gamma}$	$\overrightarrow{B\Delta}$	$\overrightarrow{\Delta B}$	$\overrightarrow{A\Gamma}$
β)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{B\Gamma}=$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{A\Gamma}$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{OB}$
γ)	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{B\Delta}$
δ)	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{A\Delta}=$	$\overrightarrow{O\Delta}$	$\overrightarrow{O\Gamma}$	$\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{B\Delta}$

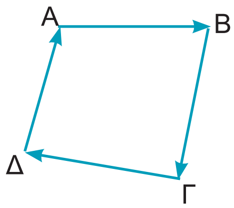


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο παρακάτω σχήμα να σχεδιάσετε τα αθροίσματα:
α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ β) $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ γ) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$

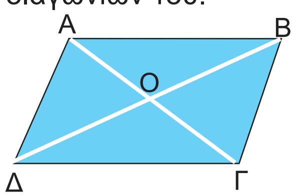


2 Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$
γ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{A\Delta}$

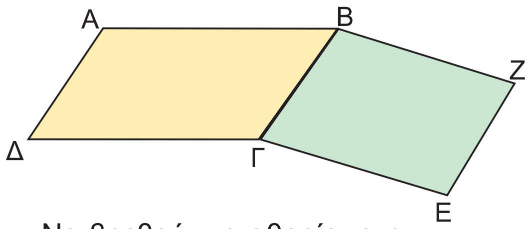


3 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ σημείο της ΒΓ. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{AM}$
β) $\overrightarrow{\Gamma M}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$
γ) $\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta M}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}$

4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του.
Να συγκρίνετε τις διαφορές:
α) $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}$
β) $\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BO}$
γ) $\overrightarrow{\Delta O}-\overrightarrow{\Delta A}$
δ) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{\Delta O}$

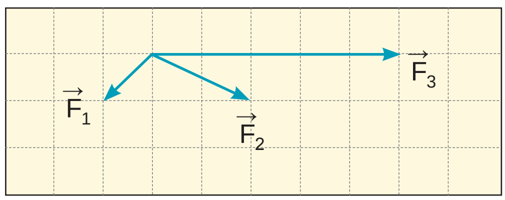


5 Στο παρακάτω σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΒΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμα.

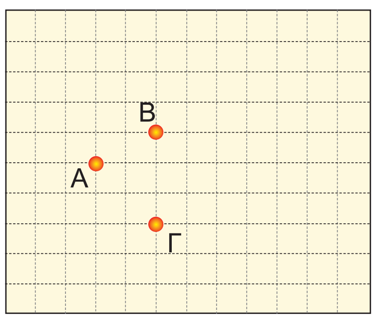


Να βρεθούν τα αθροίσματα:
α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$ β) $\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}$
γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$ δ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ZE}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

6 Σε ένα σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$, όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Να σχεδιάσετε τη συνισταμένη τους.

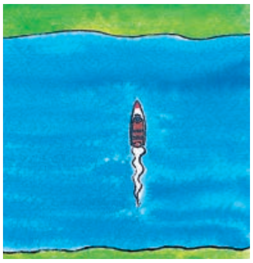


7 Στο διπλανό σχήμα να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AZ}$ και $\overrightarrow{A\Theta}$, έτσι ώστε να ισχύει:
$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$,
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}$,
$\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$ και
$\overrightarrow{A\Theta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}$.



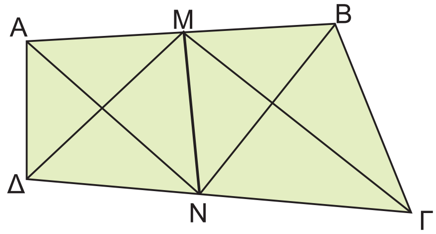
8 Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$), να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΓΒ} - \overrightarrow{ΓΑ} = \overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΜΓ}$.

9 Μία βάρκα διασχίζει κάθετα ένα ποτάμι. Αν η βάρκα κινείται μόνο από τη μηχανή της, θα έχει ταχύτητα με μέτρο 2 m/s. Η βάρκα παρασύρεται, όμως, από το ρεύμα του ποταμού που έχει ταχύτητα 0,6 m/s.



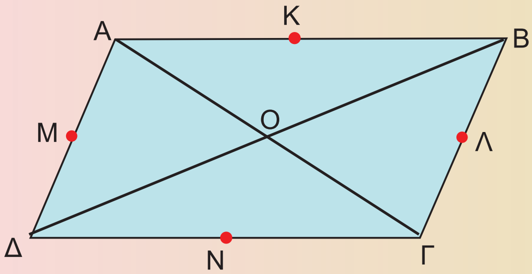
α) Να σχεδιάσετε τις δύο ταχύτητες.
β) Να σχεδιάσετε τη διεύθυνση που θα πάρει τελικά η βάρκα.

10 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.
Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΜΓ} + \overrightarrow{ΜΔ} = \overrightarrow{ΑΝ} + \overrightarrow{ΒΝ}$.



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

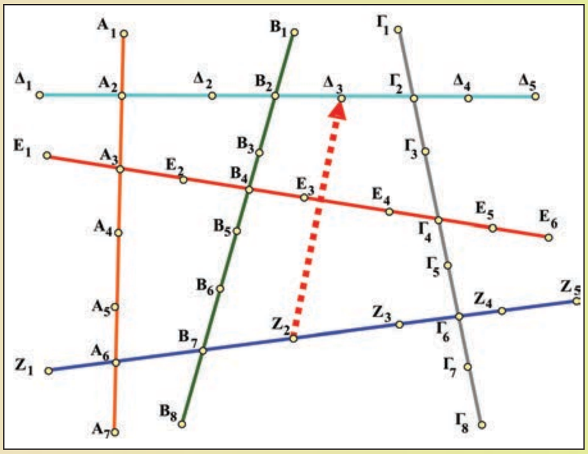
Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, είναι τα μέσα των πλευρών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
Μπορείτε να συμπληρώσετε το παρακάτω διανυσματοσταυρόλεξο;



$\overrightarrow{ΑΟ}$	+		=	$\overrightarrow{ΑΒ}$
+		+		+
$\overrightarrow{ΟΝ}$	+		=	
=		=		=
	+	$\overrightarrow{ΟΛ}$	=	

Τα διανύσματα στο χάος της κυκλοφορίας

Σε μια πόλη υπάρχουν έξι γραμμές μετρό. Ο χάρτης των στάσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για να μεταβούμε από ένα σημείο της πόλης σε ένα άλλο, για παράδειγμα από το σημείο $Ζ_2$ στο σημείο $Δ_3$, μπορούμε να κινηθούμε με διάφορους τρόπους, οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν με διανύσματα:



$\overrightarrow{Ζ_2Δ_3} = \overrightarrow{Ζ_2Γ_6} + \overrightarrow{Γ_6Γ_2} + \overrightarrow{Γ_2Δ_3}$ ή

$\overrightarrow{Ζ_2Δ_3} = \overrightarrow{Ζ_2Β_7} + \overrightarrow{Β_7Β_2} + \overrightarrow{Β_2Δ_3}$ ή $\overrightarrow{Ζ_2Δ_3} = \overrightarrow{Ζ_2Α_6} + \overrightarrow{Α_6Α_3} + \overrightarrow{Α_3Β_4} + \overrightarrow{Β_4Β_2} + \overrightarrow{Β_2Δ_3}$

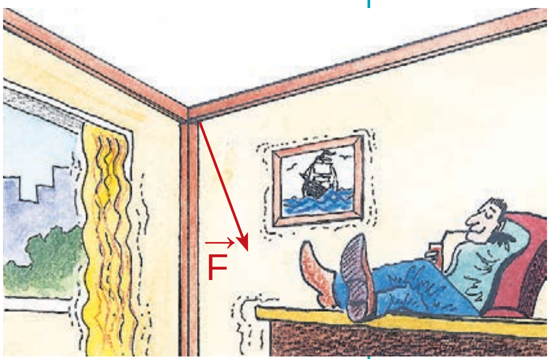
α) Μπορείτε να βρείτε άλλους τρόπους (έστω και πιο μακρινούς) για να κάνουμε τη διαδρομή $\overrightarrow{Ζ_2Δ_3}$ και να τους γράψετε σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων;

β) Με ποιους τρόπους μπορεί κανείς να μεταβεί από το σημείο $Α_4$ στο σημείο $Γ_3$; Να γράψετε τις διαδρομές αυτές σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων.

γ) Να κάνετε τις διαδρομές: $\overrightarrow{Ε_3Α_7}$, $\overrightarrow{Δ_4Ζ_1}$ και $\overrightarrow{Γ_8Α_1}$ με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους!

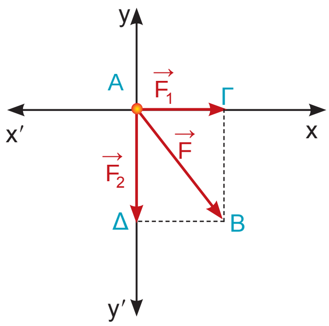
2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες



Όταν γίνεται σεισμός, ασκούνται δυνάμεις στα διάφορα μέρη των κτιρίων. Ο μηχανικός που κατασκευάζει τα κτίρια, για να εξασφαλίσει την αντοχή τους χρησιμοποιεί τις γνώσεις των επιστημών της «Στατικής» και της «Αντοχής Υλικών». Υπολογίζει, λοιπόν, τις δυνάμεις που ασκούνται στα κάθετα και οριζόντια μέρη των κτιρίων (κολόνες και δοκάρια), για να μην πέσουν τα κτίρια. Κατά τη διάρκεια του σεισμού εφαρμόζεται μια πλάγια δύναμη στις κολόνες και τα δοκάρια του κτιρίου, όπως φαίνεται στο σκίτσο.

Ο μηχανικός ενδιαφέρεται να γνωρίζει χωριστά τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, που ασκούνται αντίστοιχα στο δοκάρι και την κολόνα. Είναι αναγκαία, λοιπόν, η ανάλυση ενός διανύσματος $\vec{F}$ σε δύο κάθετα διανύσματα.



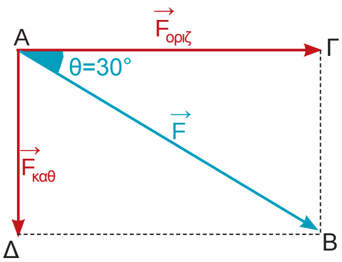
Η ανάλυση του διανύσματος $\vec{F}$ στις δύο κάθετες **συνιστώσες** του $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, γίνεται ως εξής:

Στην αρχή Α του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = \vec{F}$, σχηματίζουμε δύο κάθετες ευθείες x′x και y′y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από το πέρας Β φέρνουμε δύο κάθετες: τη ΒΓ στην x′x και τη ΒΔ στην y′y. Τότε το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο, επομένως:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}$ και επιπλέον $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{F}_1$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}_2$.

Μέτρα Συνιστωσών

Αν γνωρίζουμε ότι το μέτρο της δύναμης που προέρχεται από το σεισμό είναι $|\vec{F}| = 6000$ N και σχηματίζει με το οριζόντιο δοκάρι γωνία $\theta = 30°$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των κάθετων συνιστωσών της $\vec{F}$.



Αναλύουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες:

$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{F}_{οριζ}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}_{καθ}$.

Γνωρίζουμε ότι: $|\overrightarrow{AB}| = 6000$ N και $\theta = 30°$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$συν\theta = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{|\overrightarrow{A\Gamma}|}{|\overrightarrow{AB}|} \text{ και } ημ\theta = \frac{\Gamma B}{AB} = \frac{|\overrightarrow{\Gamma B}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Όμως $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$, οπότε $|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{\Gamma B}|$.

Επομένως:

$|\vec{F}_{οριζ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}| = |\overrightarrow{ΑΒ}| \cdot συνθ = 6000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3000\sqrt{3}$ (N).

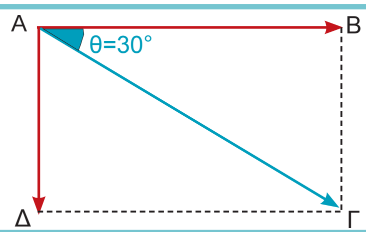
$|\vec{F}_{καθ}| = |\overrightarrow{ΑΔ}| = |\overrightarrow{ΑΒ}| \cdot ημθ = 6000 \cdot \frac{1}{2} = 3000$ (N).

Γενικότερα, για τα μέτρα των δύο κάθετων συνιστωσών $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ μιας δύναμης $\vec{F}$ ισχύει ότι:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}|\, συνθ \quad \text{και} \quad |\vec{F}_2| = |\vec{F}|\, ημθ$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ.
Αν $|\overrightarrow{ΑΓ}| = 6$, να υπολογίσετε τα μέτρα $|\overrightarrow{ΑΒ}|$ και $|\overrightarrow{ΑΔ}|$.

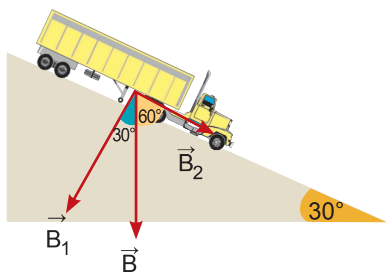


Λύση: Έχουμε: $συν30° = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{|\overrightarrow{ΑΒ}|}{|\overrightarrow{ΑΓ}|}$ και $ημ30° = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{|\overrightarrow{ΑΔ}|}{|\overrightarrow{ΑΓ}|}$, άρα

$|\overrightarrow{ΑΒ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}| \cdot συν30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ και $|\overrightarrow{ΑΔ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}| \cdot ημ30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

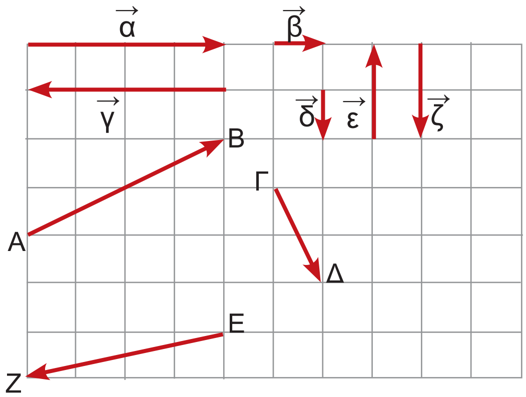
Ένα φορτηγό βάρους 40000 N, είναι σταθμευμένο σε μία κατηφόρα με γωνία κλίσης 30°, όταν ξαφνικά λύνεται το χειρόφρενο! Το διάνυσμα $\vec{B}$ του βάρους του αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η $\vec{B}_1$ εξουδετερώνεται από το έδαφος, ενώ η $\vec{B}_2$ κινεί το φορτηγό στην κατηφόρα. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$.



Λύση: Έχουμε: $συν60° = \frac{|\vec{B}_2|}{|\vec{B}|}$, οπότε: $|\vec{B}_2| = |\vec{B}| \cdot συν60° = 40000 \cdot \frac{1}{2} = 20000$ N.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα αναλύσαμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{EZ}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες αλλά τα διανύσματα μπερδεύτηκαν! Μπορείτε να βρείτε ποιες είναι οι σωστές από τις παρακάτω σχέσεις;



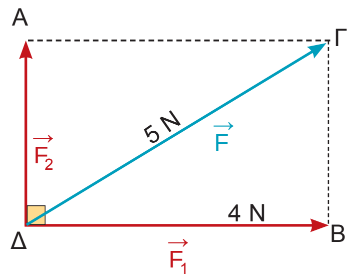
		Α	Β	Γ	Δ
α)	$\overrightarrow{AB}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\gamma}$
β)	$\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ =	$\vec{\beta}+\vec{\gamma}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\beta}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\delta}$
γ)	$\overrightarrow{EZ}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\delta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\delta}$	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$

2. Μια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $|\vec{F}|$ = 5 N αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Αν $|\vec{F}_1|$ = 4 N τότε $|\vec{F}_2|$ = ...

Α: 1 N Β: 2 N Γ: 3 N Δ: 4 N

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

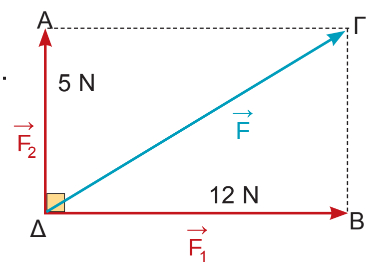


3. Μια δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα 5 N και 12 N αντίστοιχα.

Τότε $|\vec{F}|$ =......

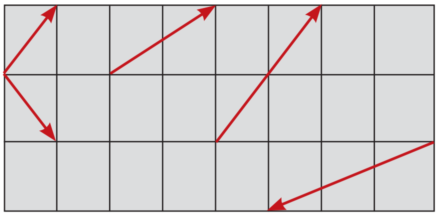
Α: 15 Β: 13 Γ: 17 Δ: 18

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

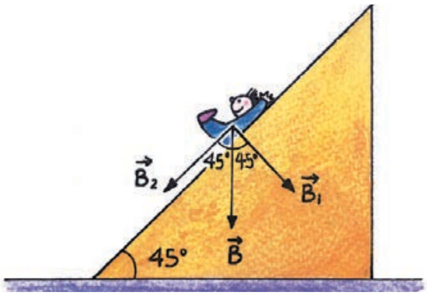


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να αναλύσετε τα παρακάτω διανύσματα σε άθροισμα δύο κάθετων συνιστωσών.

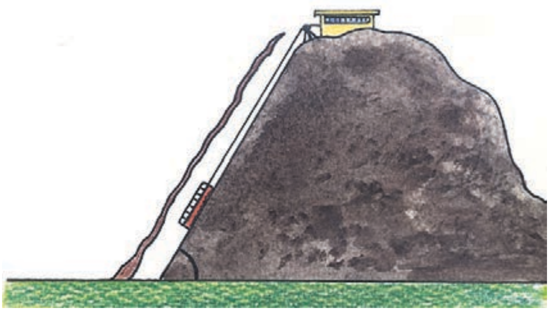


2 Ο Κωστάκης κάνει τσουλήθρα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το βάρος του Κωστάκη είναι 270 N, να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$ που τον κάνει να κινείται.



3 Σε υπόγειο τελεφερίκ οι ράγες σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο γωνία 60°. Το βάρος του βαγονιού των επιβατών (μαζί με τους επιβάτες) είναι 30000 N και σύρεται πάνω στις ράγες από την κορυφή με ένα συρματόσχοινο.

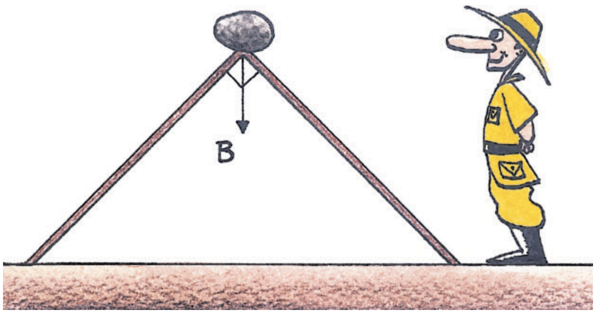
Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκείται από το συρματόσχοινο στο βαγόνι, ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω;



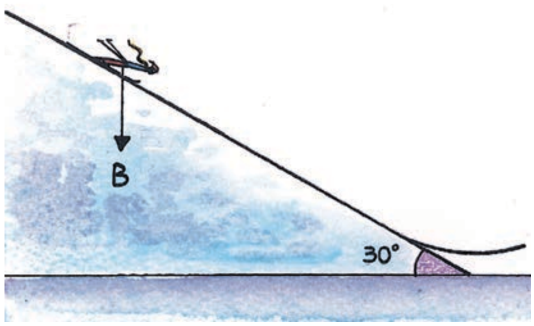
4 Ένας κυνηγός για να φτιάξει μια παγίδα, χρησιμοποιεί δύο σανίδες ίσου μήκους και τις τοποθετεί στο έδαφος, ώστε να σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Στην κορυφή του τριγώνου τοποθετεί πέτρα βάρους 200 N.

Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται κάθε σανίδα από το βάρος της πέτρας;



5 Ένας σκιέρ γιγαντιαίου άλματος κατεβαίνει την εξέδρα που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία 30°. Αν το βάρος του έχει μέτρο 800 N, ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που τον μετακινεί κατά μήκος της εξέδρας;



Επανάληψη Κεφαλαίου 2

Επανάληψη στην Τριγωνομετρία

- Αν ω είναι μια οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, τότε:

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

- Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύουν:
  - $0 < \text{ημω} < 1$
  - $0 < \text{συνω} < 1$
  - $\text{εφω} = \dfrac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$

- Όταν μια οξεία γωνία μεγαλώνει, τότε αυξάνεται το ημίτονό της και η εφαπτομένη της, αλλά ελαττώνεται το συνημίτονό της.

- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα ή ίσα συνημίτονα ή ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

- Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30° – 45° – 60°

	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Επανάληψη στα Διανύσματα

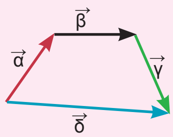
- Διανυσματικά λέγονται τα μεγέθη που έχουν μέτρο και κατεύθυνση.

- Τα στοιχεία ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο.

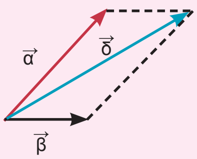
- Δύο διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα, ενώ δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

- Άθροισμα διανυσμάτων.

  Α. Η μέθοδος του πολυγώνου:
  Όταν τα διανύσματα γίνουν διαδοχικά.



  Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου:
  Όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, έχουν κοινή αρχή.



- Διαφορά διανυσμάτων.
  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

- Διαφορά διανυσμάτων με κοινή αρχή.
  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

- Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το μέτρο του είναι ίσο με 0.

- Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες με μέτρα:

$$|\vec{F_1}| = |\vec{F}|\ \text{συνθ}$$

$$|\vec{F_2}| = |\vec{F}|\ \text{ημθ}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μέτρηση Κύκλου

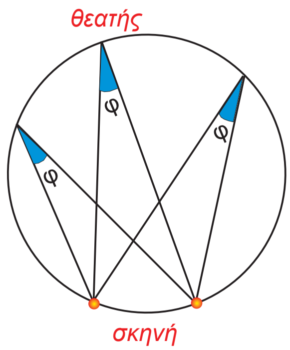
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

*Το πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου,** το οποίο ήταν ένα από τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας, οδήγησε στην **προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του αριθμού π**, του πιο διάσημου από όλους τους αριθμούς.*

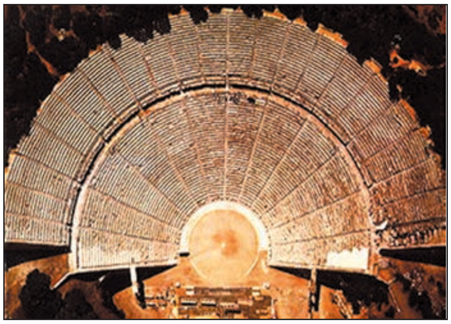
*Ο αριθμός **π** προκύπτει φυσιολογικά από τη μέτρηση του κύκλου, η οποία είναι το κύριο αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.*

Θα εξετάσουμε, επιπλέον, τα κανονικά πολύγωνα: πολύγωνα με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Είναι πολύ γνωστά σχήματα σ’ εμάς, αλλά τώρα θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά τα στοιχεία τους και την κατασκευή τους.

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες



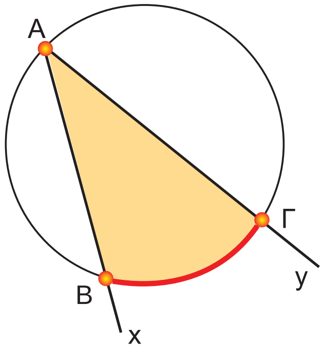
Έχετε αναρωτηθεί ποτέ γιατί τα θέατρα, όπως η Επίδαυρος, έχουν «κυκλικό» σχήμα;



Γιατί από κάθε κάθισμα, που βρίσκεται πάνω στον κύκλο, ο θεατής «βλέπει τη σκηνή με την ίδια γωνία φ».

Οι γωνίες που βλέπουμε στο διπλανό σχήμα έχουν την κορυφή τους (θεατής) πάνω στον κύκλο και οι δύο πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο.

Μια γωνία $\mathbf{x\widehat{A}y}$ που η κορυφή της **Α** ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ) και οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο (Ο, ρ).



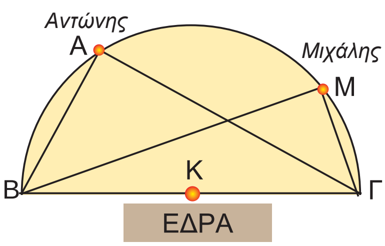
Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της.

Επίσης, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $Β\widehat{Α}Γ$ **βαίνει στο τόξο** $\overset{\frown}{ΒΓ}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο Πανεπιστήμιο γίνεται μάθημα στο Αμφιθέατρο. Δύο φοιτητές, ο Αντώνης και ο Μιχάλης, κάθονται σε μία σειρά θέσεων που σχηματίζει με την έδρα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Στο διάλειμμα ο Αντώνης μέτρησε την απόστασή του από τα δύο άκρα Β, Γ της έδρας και βρήκε ότι ΑΒ = 3 m, ΑΓ = 4 m, ενώ έχουμε ότι ΒΓ = 5 m. Ο Μιχάλης, αντίστοιχα, βρήκε ότι ΒΜ = 4,47 m και ΜΓ = 2,24 m.



α) Να εξετάσετε αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

β) Τι γωνίες είναι οι $\widehat{Α}$ και $\widehat{Μ}$;

γ) Τι γωνίες νομίζετε ότι θα είναι η $\widehat{Α}$ και $\widehat{Μ}$, αν οι μαθητές καθίσουν σε άλλες θέσεις της ίδιας σειράς;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

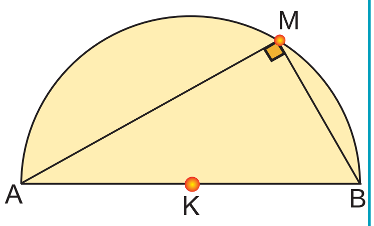
$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = ΒΓ^2$

$ΒΜ^2 + ΜΓ^2 = (4,47)^2 + (2,24)^2 = 25 = ΒΓ^2$

Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα και στα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

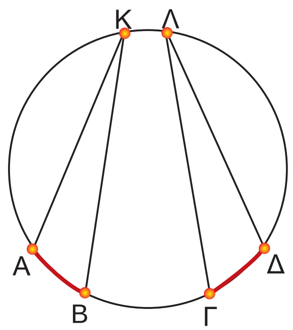
β) Αφού ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, τα τρίγωνα θα είναι ορθογώνια, οπότε θα ισχύει $\hat{A} = 90°$ και $\hat{M} = 90°$.

γ) Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{M}$ θα είναι και πάλι ορθές, οποιαδήποτε θέση και αν πάρουν οι μαθητές στην ίδια σειρά θέσεων. Γενικά αποδεικνύεται ότι:



Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Επομένως, κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που είναι ευθεία γωνία. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε εγγεγραμμένη και την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της.

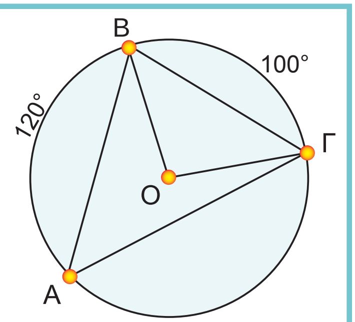


Συγκεκριμένα:

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{AB} = 120°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

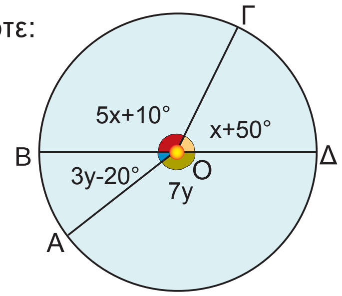


Λύση: Αφού $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100°$, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι και αυτή ίση με 100°. Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ με την επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι: $B\hat{A}\Gamma = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2} = 50°$. Ομοίως προκύπτει ότι: $B\hat{\Gamma}A = 60°$. Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°, θα ισχύει ότι:
$A\hat{B}\Gamma = 180° - 50° - 60° = 70°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΔ}$, $\overset{\frown}{ΔΑ}$.

Λύση: Τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $5x + 10° + x + 50° = 180°$ ή $6x = 120°$, επομένως $x = 20°$.



Ομοίως, τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΒΑ}$ και $\overset{\frown}{ΑΔ}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $3y - 20° + 7y = 180°$, επομένως $10y = 200°$ ή $y = 20°$.

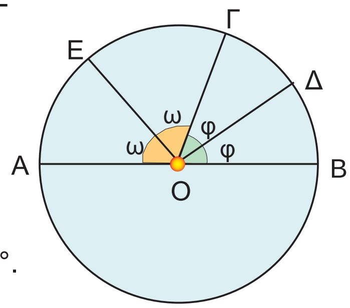
Έχουμε ότι: $\overset{\frown}{ΑΒ} = 3y - 20° = 60° - 20° = 40°$,

$\overset{\frown}{ΒΓ} = 5 \cdot 20° + 10° = 110°$, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 20° + 50° = 70°$, $\overset{\frown}{ΔΑ} = 7 \cdot 20° = 140°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $Β\hat{Ο}Γ$, $Α\hat{Ο}Γ$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το τόξο $\overset{\frown}{ΕΔ}$.

Λύση: Αφού οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $Β\hat{Ο}Γ$ και $Α\hat{Ο}Γ$ αντίστοιχα, θεωρούμε ότι $Β\hat{Ο}Δ = Δ\hat{Ο}Γ = φ$ και $Α\hat{Ο}Ε = Ε\hat{Ο}Γ = ω$.



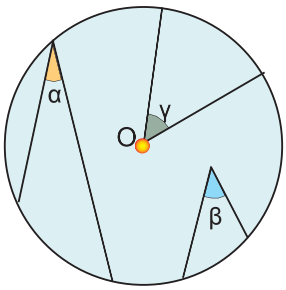
Όμως, $Δ\hat{Ο}Ε = Δ\hat{Ο}Γ + Ε\hat{Ο}Γ = φ + ω$.

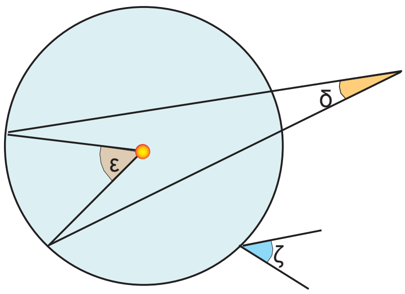
Έχουμε $Β\hat{Ο}Γ + Γ\hat{Ο}Α = 180°$, δηλαδή $2φ + 2ω = 180°$, οπότε $φ + ω = 90°$.

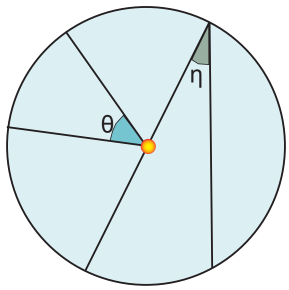
Άρα $Δ\hat{Ο}Ε = 90°$ και το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{ΕΔ}$ είναι ίσο με 90°.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

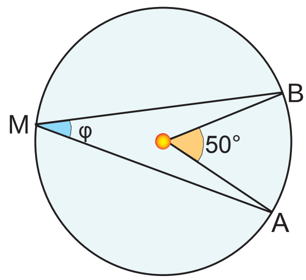
1. Στα παρακάτω σχήματα ποιες από τις γωνίες είναι εγγεγραμμένες και ποιες επίκεντρες;





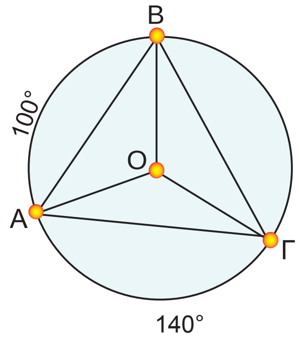


2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50°	25°	100°
β)	Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι:	50°	25°	100°

3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας Β$\hat{Α}$Γ είναι:	60°	70°	50°
β)	Το μέτρο της γωνίας Α$\hat{Ο}$Γ είναι:	120°	140°	100°
γ)	Το μέτρο της γωνίας Α$\hat{Β}$Γ είναι:	60°	70°	50°
δ)	Το μέτρο της γωνίας Α$\hat{Γ}$Β είναι:	60°	70°	50°

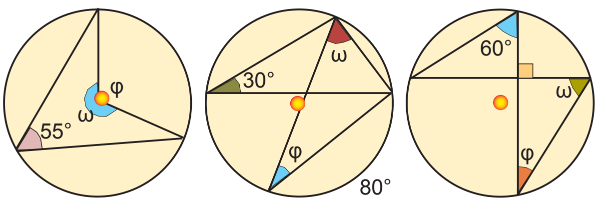
4. Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι:
Α: 80° Β: 180° Γ: 90° Δ: 45°.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

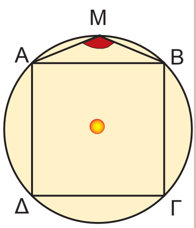
		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:	180°	60°	90°
β)	Αν σ' έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:	είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμμένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγεγραμμένης
γ)	Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:	60°	90°	30°
δ)	Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:	45°	90°	270°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

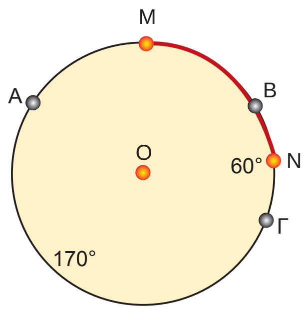
1 Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.



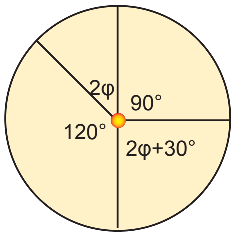
2 Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$. Να υπολογίσετε τη γωνία Α$\hat{Μ}$Β.



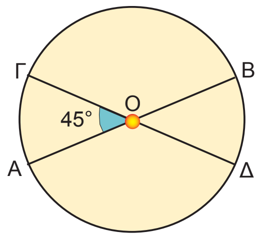
3 Έστω Μ και Ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ αντίστοιχα, ενός κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν $\overset{\frown}{ΒΓ}$ = 60° και $\overset{\frown}{ΑΓ}$ = 170°, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΜΝ}$.



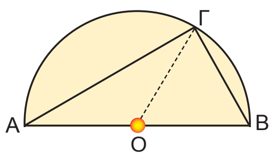
4 Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο παρακάτω σχήμα.



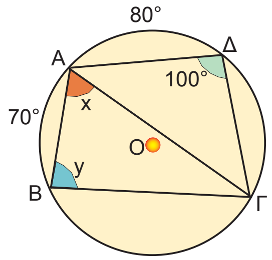
5 Στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Delta B}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$, αν γνωρίζουμε ότι $A\hat{O}\Gamma = 45°$ και ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου.



6 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6 cm δίνεται σημείο του Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 2\overset{\frown}{B\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

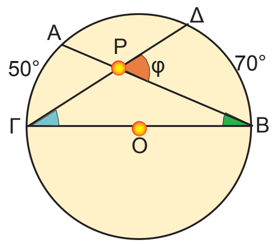


7 Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y στο παρακάτω σχήμα.

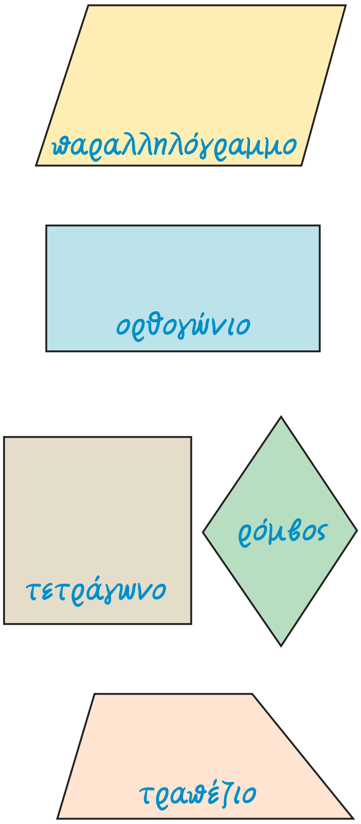


8 Σ' έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 100°$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 160°$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 80°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

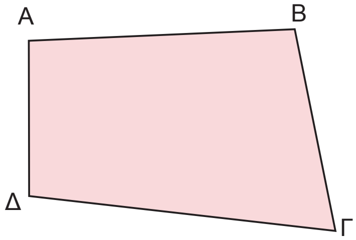
9 Στον κύκλο κέντρου Ο οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ. Αν $\overset{\frown}{A\Gamma} = 50°$ και $\overset{\frown}{B\Delta} = 70°$, να υπολογίσετε τη γωνία φ.



3.2. Κανονικά πολύγωνα

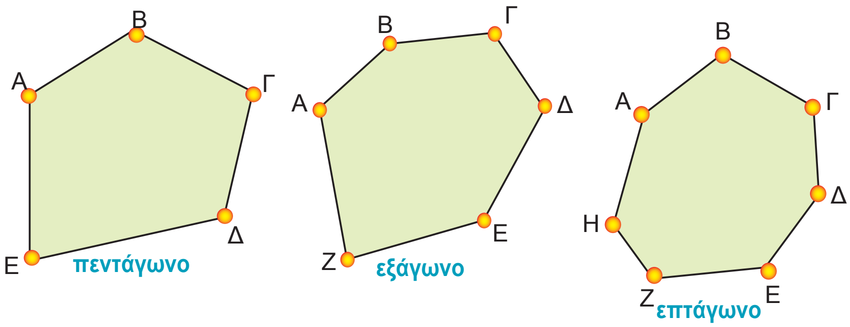


Στην Α′ Γυμνασίου μελετήσαμε διάφορα είδη τετραπλεύρων, όπως το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο, τον ρόμβο, το τετράγωνο και το τραπέζιο.



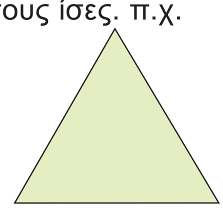
Ένα τυχαίο τετράπλευρο είναι ένα πολύγωνο με τέσσερις κορυφές.

Μπορούμε να σχηματίσουμε και πολύγωνα με 5, 6, 7, ... κορυφές, τα οποία αντίστοιχα λέγονται πεντάγωνο, εξάγωνο, επτάγωνο, ... , κ.τ.λ.

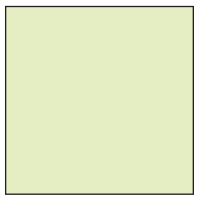


- Ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα το λέμε **ν-γωνο**. Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται τετράπλευρο.

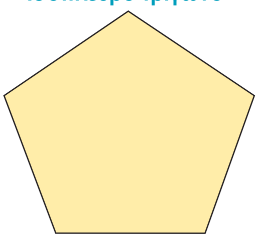
- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες. π.χ.



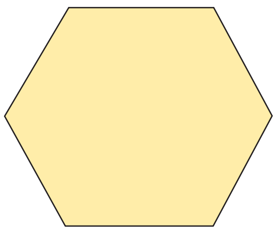
Ισόπλευρο τρίγωνο



Τετράγωνο



Κανονικό πεντάγωνο



Κανονικό εξάγωνο

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

α) Να χωρίσετε έναν κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα: $\overset{\frown}{ΑΒ}, \overset{\frown}{ΒΓ}, \overset{\frown}{ΓΔ}, \overset{\frown}{ΔΕ}, \overset{\frown}{ΕΖ}, \overset{\frown}{ΖΑ}$.

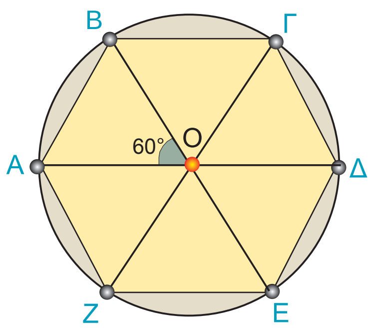
β) Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα (χορδές) ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ;

γ) Τι είδους πολύγωνο είναι το ΑΒΓΔΕΖ;

Λύση

α) Αφού όλος ο κύκλος έχει μέτρο 360°, για να τον χωρίσουμε σε έξι ίσα τόξα, κάθε τόξο θα έχει μέτρο $\frac{360°}{6} = 60°$.

Σχηματίζουμε διαδοχικά έξι επίκεντρες γωνίες ω = 60°, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα.



β) Γνωρίζουμε από την Α' Γυμνασίου ότι ίσα τόξα αντιστοιχούν σε ίσες χορδές, επομένως:
ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ.

γ) Η γωνία $Α\hat{Β}Γ$ του εξαγώνου είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου με αντίστοιχο τόξο, μέτρου:
$\overset{\frown}{ΑΖ} + \overset{\frown}{ΖΕ} + \overset{\frown}{ΕΔ} + \overset{\frown}{ΔΓ} = 60° + 60° + 60° + 60° = 240°$.

Επομένως, $Α\hat{Β}Γ = \frac{1}{2}240° = 120°$.

Ομοίως, έχουμε ότι:
$Β\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Δ}Ε = Δ\hat{Ε}Ζ = Ε\hat{Ζ}Α = Ζ\hat{Α}Β = 120°$.
Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους, οπότε είναι κανονικό.

Η διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) ακολουθεί τα εξής βήματα:

1ο βήμα:
Υπολογίζουμε τη γωνία $ω = \frac{360°}{ν}$.

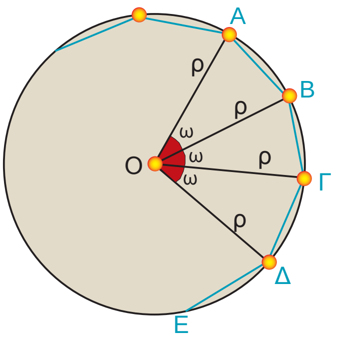
2ο βήμα:
Σχηματίζουμε διαδοχικά ν επίκεντρες γωνίες ω, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε ν ίσα τόξα.

3ο βήμα:
Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.

Είδαμε ότι με την προηγούμενη διαδικασία κατασκευάζεται ένα κανονικό εξάγωνο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του πολυγώνου.

Επίσης, λέμε ότι το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στον συγκεκριμένο κύκλο. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εγγράψουμε σε έναν κύκλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και γενικά ένα κανονικό ν-γωνο.

Γωνία και κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου



➤ Κεντρική γωνία ν-γώνου

Ας θεωρήσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ).

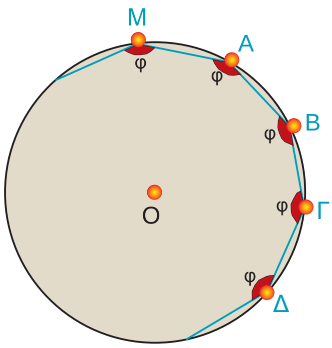
Είδαμε προηγουμένως ότι για να χωρίσουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα, θεωρούμε ν διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $ω = \dfrac{360°}{ν}$.

Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται **κεντρική γωνία** του κανονικού ν-γώνου.

Επομένως:

> **Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $ω = \dfrac{360°}{ν}$.**

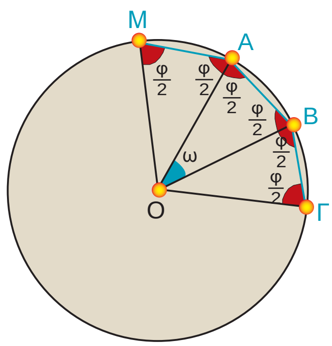
➤ Γωνία ν-γώνου



Σε οποιοδήποτε κανονικό ν-γωνο οι γωνίες $M\hat{A}B$, $A\hat{B}Γ$, $B\hat{Γ}Δ$, ... κ.ο.κ. είδαμε ότι είναι ίσες, αφού είναι εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα και τις συμβολίζουμε με φ.

- Η γωνία φ ονομάζεται **γωνία του κανονικού ν-γώνου**.

Ας δούμε τη σχέση της κεντρικής γωνίας ω και της γωνίας φ του ν-γώνου. Ενώνουμε το κέντρο του ν-γώνου με τις κορυφές, οπότε σχηματίζονται ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα.



Σε καθένα από τα τρίγωνα αυτά οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με $\dfrac{φ}{2}$. Στο τρίγωνο ΟΑΒ θα έχουμε ότι:

$$ω + \frac{φ}{2} + \frac{φ}{2} = 180° \quad ή \quad ω + φ = 180° \quad ή \quad \boxed{φ = 180° - ω}$$

Επομένως:

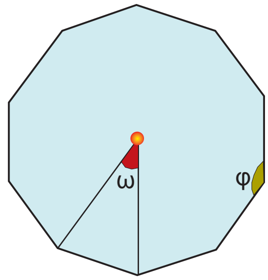
> **Η γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ν-γώνου.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

α) Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου.
β) Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 162°.

Λύση: α) Αν ονομάσουμε φ τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου και ω την κεντρική του γωνία, έχουμε:

$$\varphi = 180° - \omega = 180° - \frac{360°}{10} = 180° - 36° = 144°.$$



β) Ισχύει ότι: $\varphi = 180° - \omega$ ή $162° = 180° - \frac{360°}{\nu}$ ή

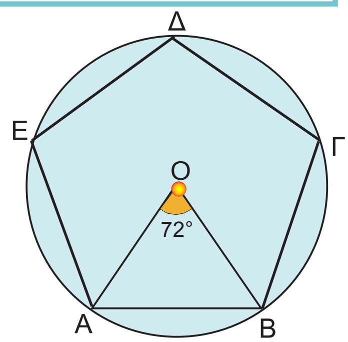
$$\frac{360°}{\nu} = 180° - 162° \text{ ή } \frac{360°}{\nu} = 18° \text{ ή } \nu = \frac{360}{18} \text{ ή } \nu = 20.$$

Δηλαδή, το κανονικό εικοσάγωνο έχει γωνία φ = 162°.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο.

Λύση:
- ➤ Γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = \frac{360°}{5} = 72°$.
- ➤ Με τον διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{AB}$.
- ➤ Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.



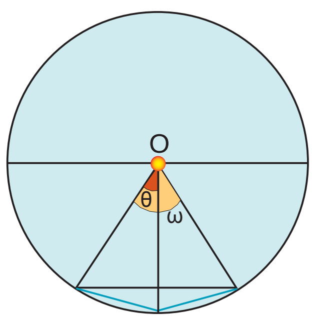
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται ένα κανονικό ν-γωνο. Να κατασκευάσετε το κανονικό πολύγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές (2ν-γωνο).

Λύση: Αν ω είναι η κεντρική γωνία του πολυγώνου που έχει ν πλευρές, και θ η κεντρική γωνία του πολυγώνου με 2ν πλευρές, έχουμε ότι $\omega = \frac{360°}{\nu}$ και $\theta = \frac{360°}{2\nu}$.

Επομένως, $\theta = \frac{\omega}{2}$.

Αν φέρουμε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του ν-γώνου, οι γωνίες που θα σχηματιστούν θα είναι οι κεντρικές γωνίες του πολυγώνου με 2ν πλευρές. Οι διχοτόμοι, όπως γνωρίζουμε, διέρχονται από τα μέσα των τόξων. Τα μέσα αυτών των τόξων και οι κορυφές του αρχικού ν-γώνου αποτελούν τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Η κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου είναι:	120°	30°	60°
β)	Η κεντρική γωνία κανονικού δωδεκάγωνου είναι:	120°	30°	60°
γ)	Η κεντρική γωνία κανονικού πεντάγωνου είναι:	52°	72°	132°
δ)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 36°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:	6	10	12
ε)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 10°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:	12	24	36

2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 40°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	50°	90°	140°
β)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 72°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	108°	18°	172°
γ)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 30°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	150°	30°	60°

3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
Ένα κανονικό πολύγωνο έχει 15 πλευρές.	α) Η κεντρική του γωνία είναι:	15°	24°	30°
	β) Η γωνία του πολυγώνου είναι:	24°	156°	72°
Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 150°	γ) Η κεντρική του γωνία είναι:	15°	24°	30°
	δ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:	15	12	8
Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 135°	ε) Η κεντρική του γωνία είναι:	35°	45°	65°
	στ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:	8	12	18

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.

πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3		
5		
6		
10		

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15°	
	150°
72°	
	160°

2 Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι τετραπλάσια της κεντρικής του γωνίας. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

3 Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία ω και τη γωνία φ ενός κανονικού εξαγώνου και να επαληθεύσετε ότι: $ω + φ = 180°$.

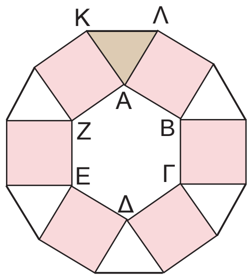
4 Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι τα $\frac{5}{3}$ της ορθής. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

5 Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο:
α) με κεντρική γωνία ω = 16°.
β) με γωνία φ = 130°.

6 Να κατασκευάσετε κανονικό οκτάγωνο.

7 Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία;

8 Με πλευρές τις πλευρές ενός κανονικού εξάγωνου, κατασκευάζουμε τετράγωνα εξωτερικά του εξαγώνου. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές των τετραγώνων, που δεν είναι και κορυφές του εξαγώνου, σχηματίζουν κανονικό δωδεκάγωνο.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

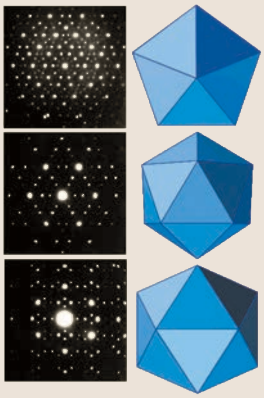
Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξοχότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα.
Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο "συμμετρικός" τρόπος χρωματισμού.

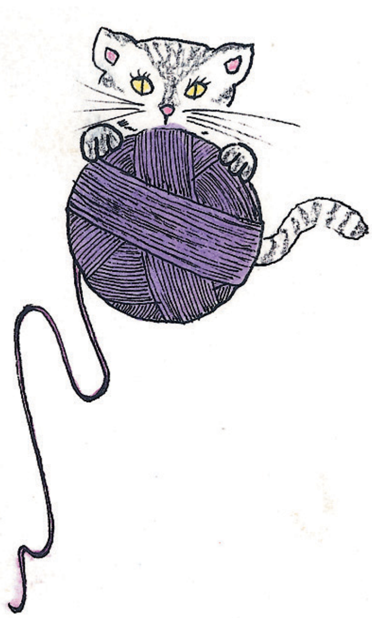
Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρησκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ' αυτό το είδος Τέχνης. Για παράδειγμα, η ισλαμική θρησκεία απαγορεύει την αναπαράσταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για τον λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.

Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του 20ού αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.



Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

3.3. Μήκος κύκλου



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ας θεωρήσουμε ένα νόμισμα των 2 €. Αφού μετρήσετε τη διάμετρό του δ, να βάλετε μελάνι γύρω - γύρω από το νόμισμα και να το κυλίσετε κάθετα στο χαρτί, έτσι ώστε να κάνει μια πλήρη περιστροφή.

α) Το μήκος L που διαγράφει είναι το μήκος του κύκλου. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

δ =	
L =	
$\frac{L}{\delta}$ **=**	

β) Ας δούμε κατόπιν μερικές προσεγγιστικές μετρήσεις από την Αστρονομία για την «περιφέρεια» και τις διαμέτρους κάποιων πλανητών. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Πλανήτες	**L**	**δ**	$\frac{L}{\delta}$
Ερμής	15320 km	4879 km	
Αφροδίτη	38006,6 km	12104 km	
Άρης	21333,2 km	6794 km	
Γη	40053,8 km	12756 km	
Σελήνη	10914,6 km	3476 km	

Να κάνετε τις πράξεις με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

δ=	2,5 cm
L=	7,85 cm
$\frac{L}{\delta}$ **=**	3,14 cm

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{L}{\delta}$ είναι περίπου 3,14 για όλους τους πλανήτες. Αυτός ο σταθερός λόγος ονομάστηκε από τους αρχαίους Έλληνες ως «ο αριθμός π», ο πιο διάσημος και αξιοσημείωτος απ' όλους τους αριθμούς (βλέπε Ιστορικό σημείωμα).

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία. Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία του π είναι:

π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971 ...

Από τη σχέση $\frac{L}{\delta} = \pi$, προκύπτει ότι:

Το μήκος του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = \pi\delta \quad \text{ή} \quad L = 2\pi\rho$$

Παρατήρηση:

*Στις εφαρμογές και ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε για τον **π** την προσεγγιστική τιμή **3,14**.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένας κύκλος έχει μήκος L = 9,42 cm. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

Λύση: Για το μήκος του κύκλου ισχύει ότι:

$L = 2\pi\rho$ ή $\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{9{,}42}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}5$ cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας κύκλος έχει μήκος 10 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

Λύση: Θα ισχύει ότι: $L_1 = L_2 + 10$ ή $2\pi\rho_1 = 2\pi\rho_2 + 10$. Επομένως:

$\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2\pi}$ ή $\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2 \cdot 3{,}14}$ ή $\rho_1 = \rho_2 + 1{,}59$.

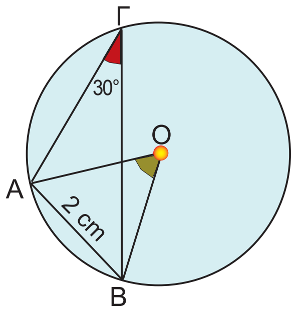
Δηλαδή, η ακτίνα του πρώτου κύκλου είναι μεγαλύτερη κατά 1,59 cm της ακτίνας του δεύτερου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί το μήκος του κύκλου στο παρακάτω σχήμα.

Λύση: Η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίση με 30°, οπότε βρίσκουμε την αντίστοιχη επίκεντρη $A\hat{O}B = 2 \cdot 30° = 60°$. Επομένως, το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΒ = ΑΒ = 2 cm, οπότε ρ = 2 cm. Άρα, το μήκος του κύκλου είναι:

$L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$ cm.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

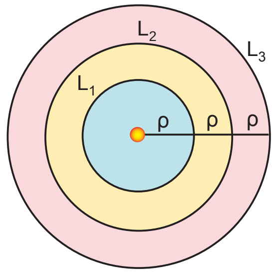
1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ	5 cm		4 cm	3 cm		9 cm
Μήκος κύκλου L		37,68 cm			12,56 cm	

2. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το μήκος του κύκλου:
Α: διπλασιάζεται   Β: τριπλασιάζεται   Γ: τετραπλασιάζεται   Δ: παραμένει το ίδιο.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Τρεις ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες ρ, 2ρ, 3ρ αντίστοιχα.
Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_2}{L_3}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$\frac{L_1}{2\rho}$	$\frac{L_2}{4\rho}$	$\frac{L_3}{6\rho}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος έχει μήκος 20 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

2 Γύρω από τον κορμό ενός αιωνόβιου δέντρου τυλίγουμε ένα σκοινί. Μετράμε το σκοινί και βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,5 m. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού.

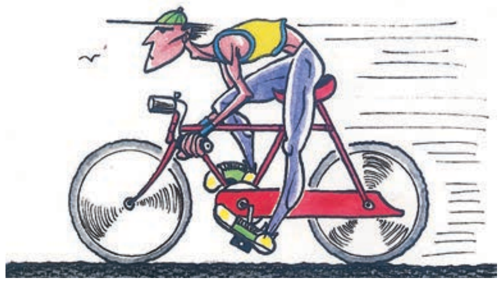
3 Οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5 cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι ακτίνες τους
β) οι περίμετροί τους.

4 Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο 2 προς 1. Να βρείτε τον λόγο:
α) των διαμέτρων τους.
β) των ακτίνων τους.

5 Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 2,5 cm. Να βρείτε πόσο διάστημα θα διαγράψει το άκρο του λεπτοδείκτη σε 12 ώρες.

6 Στη μηχανή ενός αυτοκινήτου δύο τροχαλίες Α, Β συνδέονται με ελαστικό ιμάντα. Αν ρ_A = 2 cm και ρ_B = 8 cm, να βρείτε πόσες στροφές θα κάνει η Α, αν η Β κάνει μία στροφή.

7 Ένας ποδηλάτης, που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα ρ = 30 m.
Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20km/h;



8 Γνωρίζουμε ότι ο Ισημερινός της Γης έχει μήκος 40.000 km περίπου. Θεωρώντας ότι η Γη είναι σφαιρική να βρείτε την ακτίνα της.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ \ldots$$

Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, –όπως λέγεται– αριθμός που συναντάται στη φύση. *Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο* **π** *θεωρούνταν ίσος με το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο* **π** *είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το* $3\frac{1}{8}$.

Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $\left(\frac{8}{9}\delta\right)^2$, *όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε,* $\pi \approx 3{,}16049\ldots$

Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν επιστημονική μέθοδο για τον υπολογισμό του **π**. *Το συνδύασαν με ένα από τα περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.*

Εκτιμήσεις του π

Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρούν προσεγγίσεις του **π** *με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \leq \pi \leq 3\frac{10}{70}$

$3{,}14085\ldots \leq \pi \leq 3{,}142857$

$\pi \approx 3\frac{1}{7}$ ή $\frac{22}{7}$

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ: $\pi \approx \frac{377}{120}\ (=3{,}1416\ldots)$

TSU CHUNG-CHI (Κίνα): $3{,}1415926 \leq \pi \leq 3{,}1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

AL–KASHI *(15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

LUDOLPH VAN CEULEN: *20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

SNELL: *34 ψηφία.*

VIETE *(1592): πρώτος τύπος:* $\frac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots}$

JOHN WALLIS: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots$

LEIBNIZ *(1673):* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\ldots$

JOHN MACHIN *(1706): 100 δεκαδικά ψηφία*

WILLIAM SHANKS *(1853): 707*

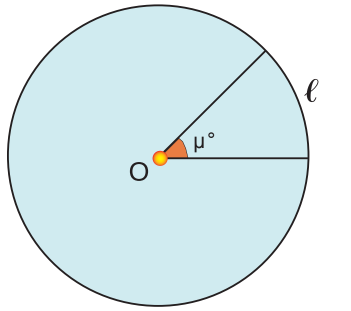
CDC 6600 *(1967): 500.000*

JOLIANN DASE *(1824 - 1861): 200*

ENIAC *(H/Y)(1949): 2037*

Ιαπωνική Ομάδα *(1993): 16.777.216 (=*2^{24}*).*

3.4. Μήκος τόξου



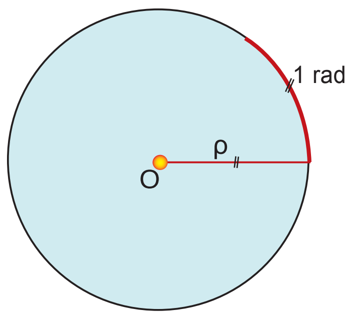
Για να υπολογίσουμε το μήκος ενός τόξου μετρημένου σε μοίρες, αρκεί να εφαρμόσουμε την **απλή μέθοδο** των τριών.

Ένα τόξο 360° (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος $2\pi\rho$.
Ένα τόξο μ° πόσο μήκος έχει;

Τόξο	Μήκος
360°	$2\pi\rho$
μ°	ℓ

Έχουμε: $\dfrac{360}{2\pi\rho} = \dfrac{\mu}{\ell}$ ή $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.

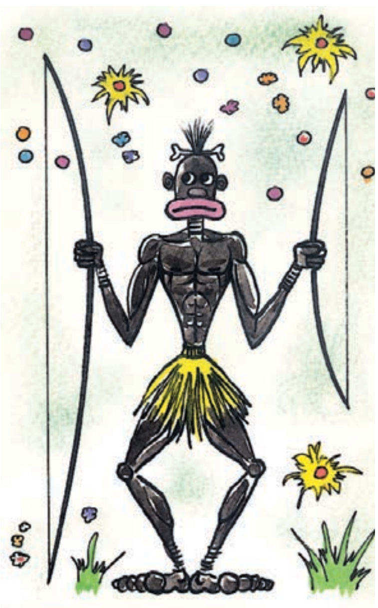
Το μήκος ενός τόξου μ° ισούται με: $\boldsymbol{\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}}$.



Ακτίνια (rad)

Αρκετές φορές ως μονάδα μέτρησης των τόξων ενός κύκλου θεωρούμε το τόξο που έχει το ίδιο μήκος με την ακτίνα ρ του κύκλου. Αυτή η μονάδα μέτρησης λέγεται **ακτίνιο** ή **rad**.
Αν χρησιμοποιήσουμε ακτίνια,τότε:

Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με: $\boldsymbol{\ell = \alpha\rho}$.



Σχέση μοιρών και ακτινίων

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις:

$$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$$

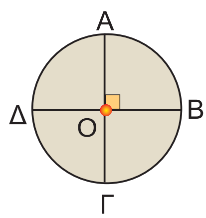
$$\ell = \alpha\rho$$

βρίσκουμε ότι: $2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360} = \alpha\rho$ ή $\pi \cdot \dfrac{\mu}{180} = \alpha$ ή $\boxed{\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\alpha}{\pi}}$.

Η αναλογία αυτή εκφράζει τη σχέση των μοιρών με τα ακτίνια.

Σχόλιο:

Ο κύκλος χωρίζεται σε τέσσερα ίσα τόξα από δύο κάθετες διαμέτρους:
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$.
Καθένα από αυτά τα τόξα έχει μέτρο 90° και ονομάζεται τεταρτοκύκλιο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω τόξα:
$\frac{\pi}{4}$ *rad,* *25°,* *48°,* $\frac{3\pi}{2}$ *rad,* *225°,* $\frac{11\pi}{6}$ *rad.*

Λύση: Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα τόξα, θα πρέπει είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε μοίρες είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε rad. Ας κάνουμε και τις δύο μετατροπές:

Μοίρες	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$25°$	$48°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$	$225°$	$\frac{11\pi}{6} = 330°$
rad	$\frac{\pi}{4}$	$25° = \frac{5\pi}{36}$	$48° = \frac{4\pi}{15}$	$\frac{3\pi}{2}$	$225° = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Επομένως, ισχύει ότι:
$25° < 45° < 48° < 225° < 270° < 330°$ ή $\frac{5\pi}{36} < \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{15} < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα τόξο 30° έχει μήκος 1,3 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση: Το μήκος του τόξου είναι: $\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360}$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$1{,}3 = \pi\rho\frac{30}{180}$$

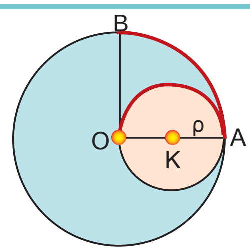
$$1{,}3 = \pi\rho\frac{1}{6}$$

$$\pi\rho = 7{,}8$$

$$\rho = \frac{7{,}8}{\pi} = \frac{7{,}8}{3{,}14} = 2{,}48 \text{ (cm)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να αποδείξετε ότι τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AO}$ και $\overset{\frown}{AB}$ στο διπλανό σχήμα είναι ίσα. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.



Λύση: Στον κύκλο (Κ, ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AO}$ είναι ημικύκλιο, επομένως έχει μήκος:
$\ell_1 = 2\pi\rho\frac{180}{360} = \pi\rho$. Στον κύκλο (Ο, 2ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο, οπότε έχει μήκος: $\ell_2 = 2\pi \cdot (2\rho)\frac{90}{360} = \pi\rho$. Άρα, τα δύο τόξα έχουν ίδιο μήκος.

Συμπεραίνουμε ότι δύο τόξα με ίσα μήκη δεν είναι απαραίτητα ίσα, αφού μπορεί να ανήκουν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε τα μέτρα των τόξων της πρώτης γραμμής από μοίρες σε ακτίνια (rad) της δεύτερης γραμμής.

Μοίρες	90°	60°	180°	270°	45°	360°
Ακτίνια	$\frac{\pi}{4}$	2π	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

2. Αν το μήκος ℓ ενός τόξου μ° είναι ίσο με το $\frac{1}{8}$ του μήκους του κύκλου στον οποίο ανήκει, τότε:

Α: μ = 45° Β: μ = 90° Γ: μ = 60° Δ: μ = 180°

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	30°				100°		60°	270°
Τόξο σε ακτίνια		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	Τόξο σε ακτίνια
	$\frac{\pi}{3}$
15°	
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{3\pi}{2}$
180°	

2 Να υπολογίσετε το μήκος ενός τεταρτοκύκλιου ακτίνας ρ = 8 cm.

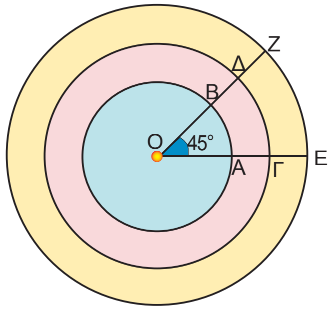
3 Σ' έναν κύκλο που έχει μήκος 188,4 cm να βρείτε το μήκος τόξου 30°.

4 Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ = 10 cm.

5 Ένα τόξο 45° έχει μήκος 15,7 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

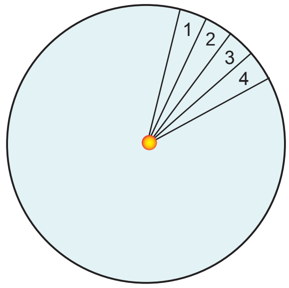
6 Δίνονται 2 τόξα π ακτινίων. Να εξετάσετε αν είναι πάντοτε ίσα.

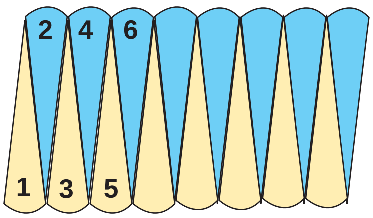
7 Δίνονται τρεις ομόκεντροι κύκλοι ακτίνων 1 cm, 1,5 cm και 2 cm και μια επίκεντρη γωνία 45°. Να βρείτε τα μήκη των τόξων που αντιστοιχούν στη γωνία αυτή.

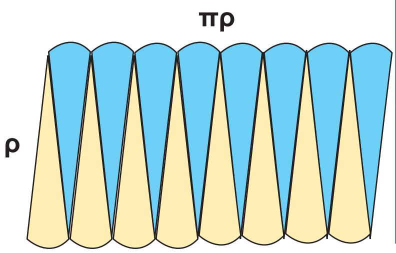


3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη μπορούμε. Κόβουμε τα κομματάκια αυτά και κατόπιν τα τοποθετούμε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:







Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα σχήμα που «μοιάζει» με ορθογώνιο. Αν συνεχίσουμε να χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο ολοένα σε πιο μικρά ίσα μέρη, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο, του οποίου η «βάση» είναι ίση με το μισό του μήκους του κύκλου, δηλαδή με **πρ**, και το «ύψος» με την ακτίνα του κύκλου.

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, δηλαδή με **ρ · πρ**.

Επομένως:

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $E = \pi\rho^2$

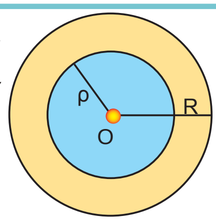
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 6,28 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση: Το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο $L=2\pi\rho$, δηλαδή $6{,}28=2 \cdot 3{,}14\ \rho$, οπότε $\rho=1$ (cm).
Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι: $E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα η κίτρινη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κύκλους ονομάζεται κυκλικός δακτύλιος. Αν το εμβαδόν του κίτρινου δακτυλίου είναι ίσο με το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δίσκου, ο οποίος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ cm, να βρείτε την ακτίνα R του μεγάλου κύκλου.



Λύση: Το εμβαδόν Ε του δακτυλίου ισούται με τη διαφορά των εμβαδών $E_1 = \pi R^2$ και $E_2 = \pi\rho^2$ των δύο κυκλικών δίσκων. Επομένως, $E = E_1 - E_2 = \pi R^2 - \pi\rho^2$.
Αφού $E = E_2$, θα έχουμε:
$\pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2$ ή $\pi R^2 = 2\pi\rho^2$ ή $R^2 = 2\rho^2$ ή $R^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$.
Οπότε: R = 2 cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Μια πιτσαρία προσφέρει πίτσες κυκλικού σχήματος σε τρία μεγέθη: τη μικρή, τη μεσαία και τη μεγάλη. Η μικρή έχει διάμετρο 23 cm και κοστίζει 7 €. Η μεσαία έχει διάμετρο 28 cm και κοστίζει 8 € και 50 λεπτά. Η μεγάλη έχει διάμετρο 33 cm και κοστίζει 11 € και 90 λεπτά. Ποια από τις τρεις πίτσες συμφέρει από άποψη τιμής;

Λύση: Για να συγκρίνουμε τις 3 πίτσες, αρκεί να βρούμε το κόστος τού 1 cm^2 για κάθε πίτσα.

Η μικρή έχει εμβαδόν: $E_1 = \pi\rho_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{23}{2}\right)^2 = 415{,}27$ (cm^2).

Η μεσαία έχει εμβαδόν: $E_2 = \pi\rho_2^2 = \pi \cdot 14^2 = 615{,}44$ (cm^2).

Η μεγάλη έχει εμβαδόν: $E_3 = \pi\rho_3^2 = \pi \cdot \left(\frac{33}{2}\right)^2 = 854{,}87$ (cm^2).

Το κόστος τού 1 cm^2 για κάθε πίτσα είναι:

Μικρή	$\frac{700}{415{,}27} = 1{,}69$ (λεπτά/cm^2)
Μεσαία	$\frac{850}{615{,}44} = 1{,}38$ (λεπτά/cm^2)
Μεγάλη	$\frac{1190}{854{,}87} = 1{,}39$ (λεπτά/cm^2)

Επομένως, συμφέρει να αγοράσουμε τη μεσαία πίτσα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν ίσο αριθμητικά με το μήκος του. Η ακτίνα του είναι ίση με:
Α: 4 Β: 2 Γ: 6 Δ: 5.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

2. Ένας κύκλος έχει μήκος L = 4 cm. Το εμβαδόν του είναι:
Α: 12 cm^2 Β: $\frac{4}{\pi} cm^2$ Γ: 9 cm^2 Δ: 16 cm^2.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν του:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ κύκλου	5 cm		2,5 cm	
Εμβαδόν κύκλου Ε		28,26 cm^2		942 cm^2

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

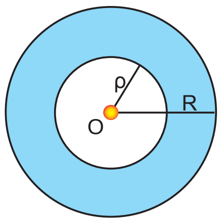
Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν Ε
1 cm		
2 cm		
3 cm		
4 cm		
ρ cm		
2ρ cm		
3ρ cm		
4ρ cm		

Τι παρατηρείτε;

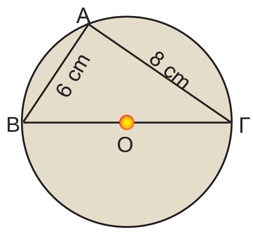
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος (Ο, ρ) έχει διάμετρο 10 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει τετραπλάσια επιφάνεια από τον κύκλο (Ο, ρ).

2 Να βρείτε το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δακτυλίου, αν ρ=2 cm και R=3 cm.



3 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.



4 Ένας κύκλος έχει ακτίνα 10 cm. Να κατασκευάσετε κυκλικό δίσκο με διπλάσιο εμβαδόν.

5 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 3 cm. Να βρεθεί (κατά προσέγγιση) η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου που είναι ισοδύναμος (δηλαδή έχει το ίδιο εμβαδόν) με το τετράγωνο.

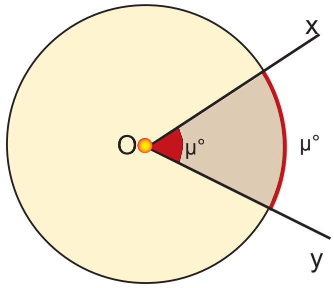
6 Λυγίζουμε ένα σύρμα μήκους 1,256 m, ώστε να σχηματίσει κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που αντιστοιχεί στον συρμάτινο κύκλο.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς α = 6 cm.

8 Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν 144π cm^2. Να βρείτε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60°.

3.6. Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο, ρ) και μια επίκεντρη γωνία $x\widehat{O}y$ μέτρου μ°. Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μέσα στη γωνία $x\widehat{O}y$ λέγεται **κυκλικός τομέας γωνίας μ°** του κύκλου (Ο, ρ).



Αν η επίκεντρη γωνία $x\widehat{O}y$ είναι μέτρου μ°, τότε και το αντίστοιχο τόξο της έχει μέτρο μ°, οπότε βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα:

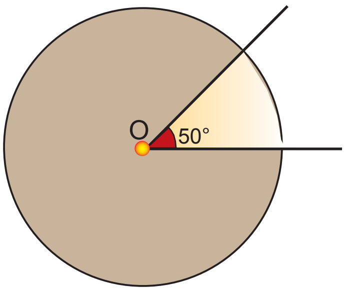
Τόξο σε μοίρες	360°	μ°
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

$$\frac{360}{\pi\rho^2} = \frac{\mu}{E} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}}$$

Αν το τόξο έχει μετρηθεί σε ακτίνια και ισούται με α rad, τότε πάλι έχουμε:

Τόξο σε ακτίνα (rad)	2π	α
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

$$E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\rho^2\alpha}{2} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}\alpha\rho^2}$$



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Μια κυκλική πλατεία έχει ακτίνα ρ = 20 m. Ένας προβολέας είναι τοποθετημένος στο κέντρο της πλατείας και εκπέμπει μια δέσμη φωτός που φωτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 50°.

α) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που φωτίζεται.

Λύση

α) Το εμβαδόν της πλατείας είναι: $E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 20^2 = 1256$ (m²).

β) Γνωρίζουμε ότι όλη η πλατεία αντιστοιχεί σε τόξο 360° και έχει εμβαδόν 1256 m². Για να βρούμε το εμβαδόν ε του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε τόξο 50°, χρησιμοποιούμε την απλή μέθοδο των τριών, οπότε:

360°	50°
1256	ε

$$\frac{360}{1256} = \frac{50}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \varepsilon = 1256 \cdot \frac{50}{360} = 174{,}44 \ (\text{m}^2).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα στον στίβο της σφαιροβολίας ακτίνας ρ = 24 m και γωνίας 65°.

Λύση: Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

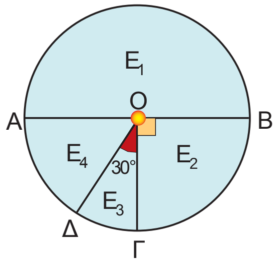
$$E = \pi\rho^2 \frac{\mu}{360} = 3{,}14 \cdot 24^2 \cdot \frac{65}{360} = 326{,}56 \ (\text{m}^2).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο παρακάτω κύκλος έχει διάμετρο ΑΒ και εμβαδόν 40 cm^2. Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4.

Λύση: Έχουμε ότι:

$\Delta\hat{O}\Gamma = 30°$, $\Gamma\hat{O}B = 90°$ και $\Delta\hat{O}A = 90° - \Delta\hat{O}\Gamma = 90° - 30° = 60°$



Επομένως: $E_1 = (\pi\rho^2)\dfrac{180}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{2} = 20\ (cm^2)$.

$E_2 = (\pi\rho^2)\dfrac{90}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{4} = 10\ (cm^2)$.

$E_3 = (\pi\rho^2)\dfrac{30}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{12} = 3{,}33\ (cm^2)$.

$E_4 = (\pi\rho^2)\dfrac{60}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{6} = 6{,}67\ (cm^2)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ακτίνα κύκλου	γωνία κυκλικού τομέα	εμβαδόν κυκλικού τομέα
ρ = 2 cm	μ = 60°	
	μ = 45°	$E = 8\pi\ cm^2$
ρ = 3 cm		$E = 3\pi\ cm^2$

2. Σ' έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ... (cm) ο κυκλικός τομέας γωνίας 120° έχει μήκος τόξου 6π (cm) και εμβαδόν .... (cm^2). Να συμπληρώσετε τα κενά.

3. Η ακτίνα ενός κύκλου είναι 12 cm. Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 60° έχει εμβαδόν:
Α: 24π (cm^2) Β: 36π (cm^2) Γ: 54π (cm^2) Δ: 108π (cm^2).
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Αν το εμβαδόν κυκλικού τομέα είναι 12,56 cm^2 και η γωνία του είναι 90°, η ακτίνα του κύκλου είναι: Α: 2 cm, Β: 4 cm, Γ: 9 cm, Δ: 7 cm.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα του κύκλου:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

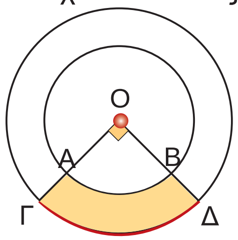
1 Να υπολογιστεί η γωνία κυκλικού τομέα που έχει εμβαδόν ίσο με το $\dfrac{1}{8}$ του εμβαδού του κύκλου.

2 Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 30° έχει εμβαδόν 1 m^2. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

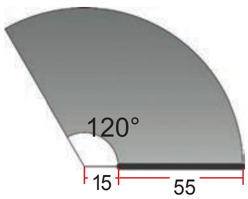
3 Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι 1256 cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 36°.

4 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας 45° είναι 20,25π cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου στον οποίο ανήκει ο τομέας.

5 Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $ρ_1$=3 cm και $ρ_2$=4 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.

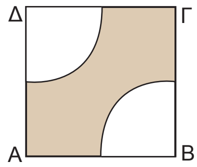


6 Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει μήκος 55 cm. Το σημείο περιστροφής απέχει από το λάστιχο καθαρισμού 15 cm. Αν ο υαλοκαθαριστήρας διαγράφει γωνία 120°, να υπολογίσετε την επιφάνεια που καθαρίζει.

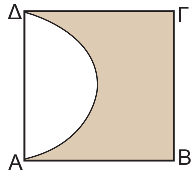


7 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων καμπυλόγραμμων επιφανειών στα παρακάτω τετράγωνα:

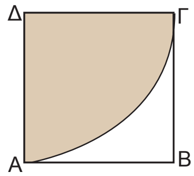
α) ΑΒ=ΒΓ=8 cm



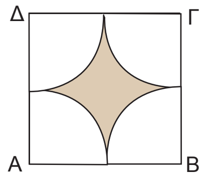
β) ΑΒ = 8 cm



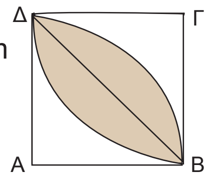
γ) ΑΒ = 8 cm



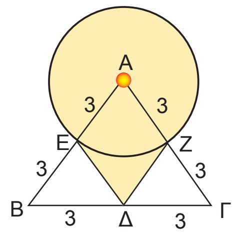
δ) ΑΒ = 8 cm



ε) ΑΒ = 8 cm



8 Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο σχήμα, αν οι αριθμοί εκφράζουν τα μήκη των αντίστοιχων τμημάτων σε cm.



Επανάληψη Κεφαλαίου 3

Μέτρηση Κύκλου

- **Εγγεγραμμένες γωνίες** ενός κύκλου που βαίνουν **στο ίδιο τόξο** ή σε **ίσα τόξα** είναι μεταξύ τους **ίσες**.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Κανονικό πολύγωνο: → **ίσες πλευρές** → **ίσες γωνίες**
- Κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου: $\omega = \dfrac{360°}{\nu}$
- Γωνία κανονικού ν-γώνου: $\varphi = 180° - \omega$
- Μήκος κύκλου: $\dfrac{L}{\delta} = \pi$ ή $L = 2\pi\rho$
- Μήκος τόξου: $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$ ή $\ell = \alpha\rho$
- Εμβαδό κυκλικού δίσκου: $E = \pi\rho^2$
- Εμβαδό κυκλικού τομέα: $E = \pi\rho^2 \cdot \dfrac{\mu}{360}$ ή $E = \dfrac{\alpha\rho^2}{2}$

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Η Γεωμετρία του Χώρου αποτελεί ένα από τα πιο ενδιαφέροντα κεφάλαια, εξαιτίας των πολλών εφαρμογών της στην καθημερινή ζωή.

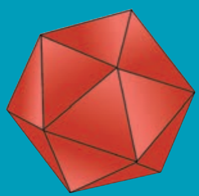
Γεωμετρικά Στερεά

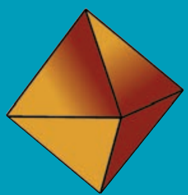
Μέτρηση Στερεών

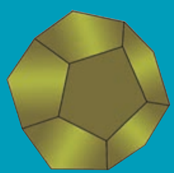
Θα μας απασχολήσει η μελέτη στερεών σωμάτων, όπως το πρίσμα, ο κύλινδρος, η πυραμίδα, ο κώνος και η σφαίρα. Θα εξετάσουμε τα στοιχεία τους και τη μέτρηση των επιφανειών τους και του όγκου τους

(Στερεομετρία).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ







Ο Χώρος

Ο φυσικός κόσμος στον οποίο ζούμε και όλα τα άψυχα αντικείμενα, καθώς και τα έμψυχα όντα που μας περιβάλλουν, αποτελούν τον «χώρο».

Τα σχήματα του χώρου διακρίνονται σε επίπεδα και στερεά και αποτελούνται από επιφάνειες, γραμμές και σημεία.

Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις και διακρίνουν τα αντικείμενα μεταξύ τους, οι γραμμές έχουν μία διάσταση και τα σημεία καμία.

Η Γεωμετρία του χώρου είναι η επιστήμη που μελετά τα στερεά σώματα και τις ιδιότητές τους στον χώρο. Η Στερεομετρία ασχολείται με τη μέτρηση των όγκων των διαφόρων στερεών σχημάτων: των πρισμάτων, των κυλίνδρων, της σφαίρας κ.ο.κ.

Ο χώρος έχει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα. *Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τη σφαίρα και κάποια κανονικά πολύεδρα, αλλά οι Πλατωνιστές ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν εκτεταμένα με τα κανονικά πολύεδρα.*

Το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο ονομάζονται Πλατωνικά Στερεά. Ονομάζονται επίσης και Κοσμικά Στερεά, καθώς στη Φιλοσοφία του Πλάτωνα συμβόλιζαν αντίστοιχα την φωτιά, τη γη, τον αέρα, το νερό και την «Πέμπτη ουσία» (quinta essentia).

Η μελέτη του κύβου, του τετράεδρου και του δωδεκάεδρου πρέπει να έγινε από τους Πυθαγόρειους· ο Θεαίτητος μελέτησε το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, ενώ ο Εύδοξος θεμελίωσε τη μέτρησή τους.

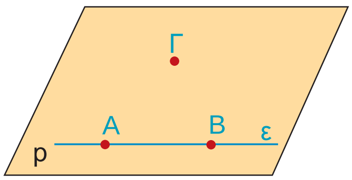
Η Στερεομετρία *αποτελεί σημαντικό μέρος της καθημερινής μας ζωής: από μία απλή παραγγελία ταπετσαρίας για το δωμάτιό μας έως το σχεδιασμό κτιρίων στην Αρχιτεκτονική. Δεν είναι όμως και λίγες οι επιδράσεις της στην Τέχνη: ζωγραφική, γλυπτική κ.ά.*

Η εξαιρετική χρήση της αίσθησης του χώρου μέσα από τη Γεωμετρία έγινε φανερή κατά την Αναγέννηση. Η Αναγέννηση διέθετε δύο βασικά χαρακτηριστικά: την έμφαση στο σχήμα και την έμφαση στο χρώμα. Ο μόνος, ίσως, ζωγράφος που έφθασε στο ανώτατο επίπεδο και στα δύο ήταν ο Leonardo da Vinci, ο οποίος έδωσε στην Επιπεδομετρία και τη Στερεομετρία μια διάσταση άγνωστη στις προηγούμενες γενιές. Ο «Μυστικός Δείπνος» του da Vinci στην εκκλησία Santa Maria della Grazie στο Μιλάνο είναι ένα έξοχο δείγμα της χρήσης των γνώσεων Στερεομετρίας στην Τέχνη και εκπλήσσει με την άμεση αίσθηση του χώρου που δίνει στον θεατή.

Η Γεωμετρία του χώρου *βρίσκει σημαντικές εφαρμογές και σε άλλες επιστήμες. Στη Βιολογία και στην Ιατρική η μελέτη του εγκεφάλου ή και άλλων οργάνων του σώματος γίνεται με έντονη την παρουσία εννοιών της Στερεομετρίας. Στη Χημεία η δομική ταξινόμηση των οργανικών ενώσεων γίνεται με ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων της Στερεομετρίας. Στη Σεισμολογία, οι προσομοιώσεις των κινήσεων των τεκτονικών πλακών ακολουθούν «γεωμετρικούς κανόνες» στον χώρο.*

Οι εφαρμογές της Γεωμετρίας του Χώρου είναι πολλές αναδεικνύοντας τη γνώση της Στερεομετρίας σε ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής μας ζωής, της Τέχνης και της Επιστήμης.

4.1. Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

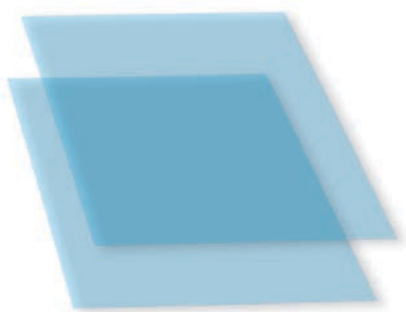


Ευθείες και Επίπεδα

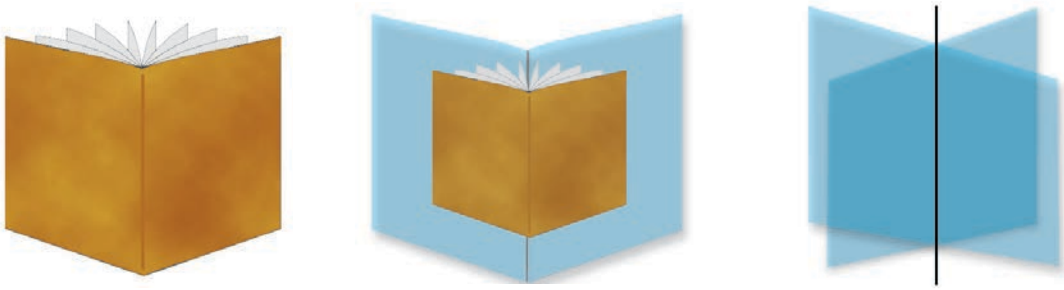
Οι πρωταρχικές έννοιες του χώρου - γνωστές ήδη από την εμπειρία μας - είναι το **σημείο**, η **ευθεία** και το **επίπεδο**.
Τα επίπεδα τα έχουμε συνδέσει στον φυσικό κόσμο με την αίσθηση των επιφανειών.
Η επιφάνεια του μαυροπίνακα, ενός λείου πατώματος, ενός καθρέπτη μάς δίνουν την αίσθηση του επιπέδου.
Ωστόσο, το επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα και για να το παραστήσουμε, σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο για να χωράει στην επιφάνεια του χαρτιού. Το ονομάζουμε, επίσης μ' ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου (p, q, r).
Μία ευθεία **ε** ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τα δύο σημεία **Α** και **Β**. Αν θεωρήσουμε ένα τρίτο σημείο **Γ** που δεν ανήκει στην ευθεία **ε**, τότε τα τρία αυτά σημεία **Α**, **Β**, και **Γ** ορίζουν ένα επίπεδο **p**. Προφανώς, η ευθεία **ε** και το σημείο **Γ** ορίζουν το ίδιο επίπεδο.
Γι' αυτό ακριβώς τον λόγο, οι φωτογράφοι για μεγαλύτερη σταθερότητα στηρίζουν τις φωτογραφικές μηχανές τους σε τρίποδο και έτσι εξηγείται η τρίτη ρόδα στα ποδήλατα των μικρών παιδιών.

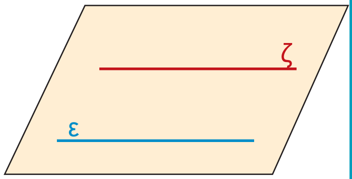
Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Σε ένα κλειστό βιβλίο οι δύο επιφάνειες που ορίζουν τα εξώφυλλά του, μας δίνουν την αίσθηση ότι όσο και αν τις προεκτείνουμε, δεν τέμνονται ποτέ.
Τα δύο επίπεδα που δημιουργούνται έτσι, λέγονται **παράλληλα**.



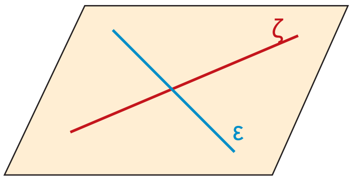
Αν τώρα ανοίξουμε το βιβλίο, παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο επίπεδα που τα κοινά τους σημεία ανήκουν σε μια ευθεία. Λέμε, τότε, ότι τα επίπεδα τέμνονται.
Η ευθεία αυτή λέγεται **τομή** των δύο επιπέδων.





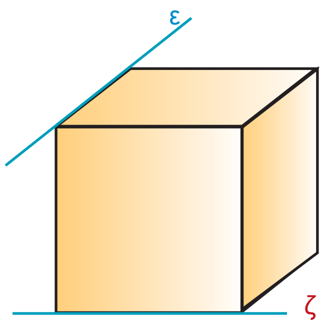
Επομένως:

Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:
- **Να είναι παράλληλα.**
- **Να τέμνονται κατά μία ευθεία.**



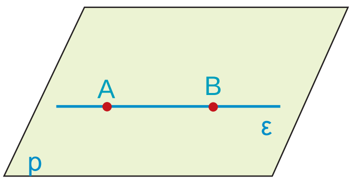
Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στον χώρο

Γνωρίζουμε ότι δύο διαφορετικές ευθείες που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορούν να είναι παράλληλες ή να τέμνονται.
Όμως, όπως φαίνεται στον διπλανό κύβο, υπάρχουν ευθείες στον χώρο που δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμβατες**.



Επομένως:

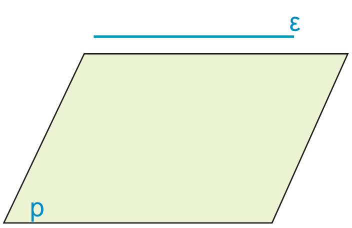
Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες **ε** και **ζ**, οι μόνες δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν είναι:
- **Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.**
- **Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.**
- **Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.**



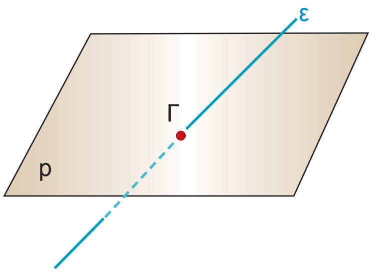
Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Όπως ξέρουμε, από δύο σημεία ορίζεται μοναδική ευθεία. Όταν τα σημεία αυτά ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη η ευθεία ανήκει στο επίπεδο αυτό.

Η ευθεία αυτή λέγεται **ευθεία του επιπέδου**.



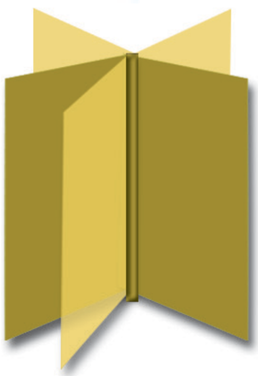
Αν μια ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με ένα επίπεδο, τότε είναι **παράλληλη** στο επίπεδο αυτό.



Είναι, όμως, δυνατό μια ευθεία να τέμνει ένα επίπεδο μόνο σε ένα σημείο. Το σημείο Γ ονομάζεται **ίχνος της ε** στο επίπεδο **p**.

Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:

- **Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.**
- **Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.**
- **Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.**

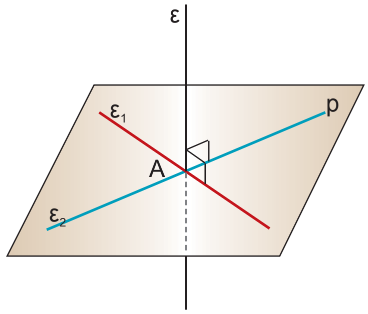


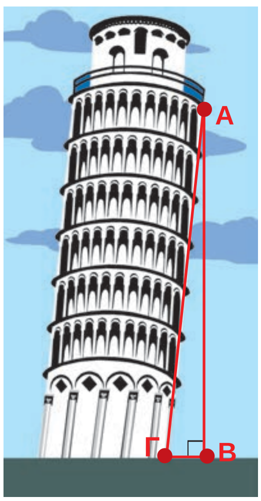
Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Ας θεωρήσουμε μια ευθεία **ε** που τέμνει το επίπεδο **p** στο σημείο **Α**. Αν η **ε** είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου **p**, που διέρχεται από το σημείο **Α**, τότε θα λέμε ότι η ευθεία **ε** είναι κάθετη στο επίπεδο **p**.

Αποδεικνύεται ότι:

Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.

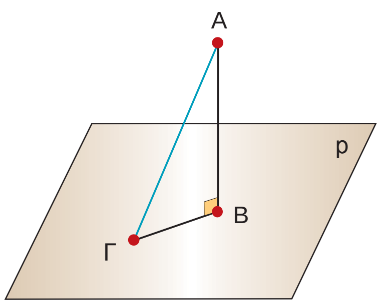


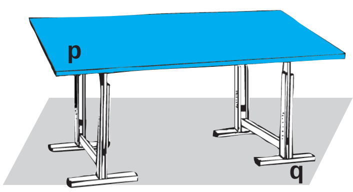


Απόσταση σημείου από επίπεδο

Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει από την κορυφή **Α** του κεκλιμένου πύργου της Πίζας, θα παρατηρήσουμε ότι διαγράφει τροχιά κάθετη προς το έδαφος. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**, που φέρουμε προς το επίπεδο **p** από ένα σημείο **Α** που δεν ανήκει στο επίπεδο, λέγεται **απόσταση** του σημείου **Α** από το επίπεδο **p**.

Παρατηρούμε ότι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΓ**.





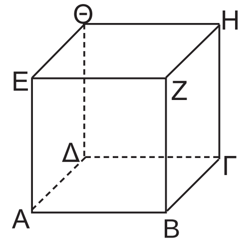
Απόσταση παράλληλων επιπέδων

Η **επιφάνεια p** του τραπεζιού ορίζει ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο **q** του δαπέδου. Το **ύψος** του τραπεζιού εκφράζει την απόσταση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου του τραπεζιού p από το επίπεδο του δαπέδου q.

Η απόσταση αυτή ονομάζεται **απόσταση των παράλληλων επιπέδων** p και q.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

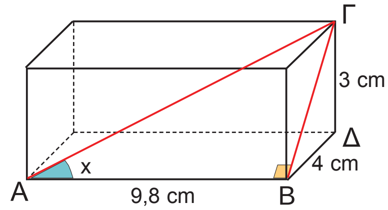
Στον κύβο ΑΒΓΔΕΖΗΘ του διπλανού σχήματος να βρείτε τις ευθείες των ακμών του που είναι ασύμβατες στην ακμή ΑΒ.



Λύση: Είναι οι ευθείες ΔΘ, ΘΕ, ΗΖ, ΗΓ, γιατί τέμνουν τα επίπεδα στα οποία ανήκει η ΑΒ χωρίς να τέμνουν την ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε:
α) τη ΒΓ β) τη γωνία x = $\widehat{ΒΑΓ}$.



Λύση: α) Η ΒΓ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΒΔΓ έχουμε:
$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5$ (cm).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα υπολογίσουμε την εφαπτομένη της γωνίας x.
Είναι λοιπόν $εφx = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, οπότε $εφx = \frac{5}{9,8} = 0,51$ και από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι $x = 27°$.

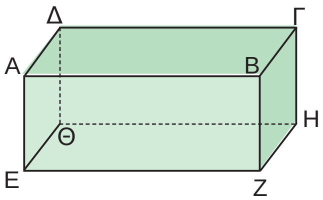
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

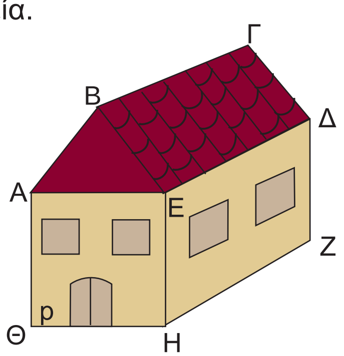
1. Μια ευθεία είναι παράλληλη σε ένα επίπεδο, όταν δεν περιέχεται στο επίπεδο αυτό και είναι παράλληλη σε μια ευθεία του επιπέδου.
2. Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, αν είναι κάθετη σε μια ευθεία του επιπέδου.
3. Μια ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο, όταν δύο σημεία της είναι και σημεία του επιπέδου.
4. Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που έχει τα άκρα του στα δύο επίπεδα.
5. Κάθε ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο, τέμνει το επίπεδο αυτό.
6. Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
7. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο p, τότε είναι κάθετη σε κάθε άλλο επίπεδο που είναι παράλληλο στο p.
8. Από τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, διέρχονται:
Α: Δύο επίπεδα **Β:** Μόνο ένα επίπεδο **Γ:** Άπειρα επίπεδα
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
9. Πόσα επίπεδα διέρχονται από μια ευθεία;
Α: Ένα **Β:** Δύο **Γ:** Τρία **Δ:** Άπειρα
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

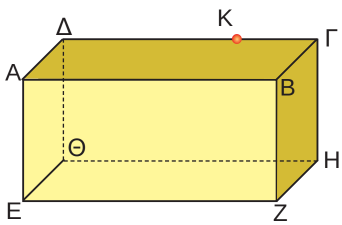
1 Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε ευθείες που είναι:
α) κάθετες στην ΑΕ.
β) παράλληλες στην ΑΒ.
γ) ασύμβατες με την ΔΓ.



2 Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε επίπεδα τα οποία:
α) είναι παράλληλα με το επίπεδο p.
β) τέμνουν το επίπεδο p. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε την κοινή τους ευθεία.

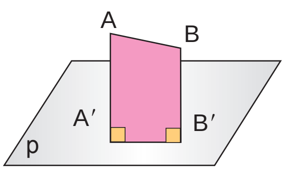


3 Το διπλανό σχήμα παριστάνει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

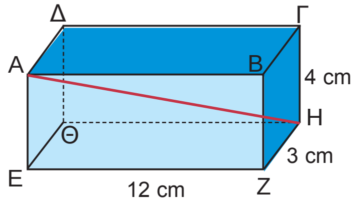


α) Να σχεδιάσετε το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία Α, Δ, Ζ.
β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που διέρχεται από το σημειο Κ και είναι κάθετη στην κάτω έδρα του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

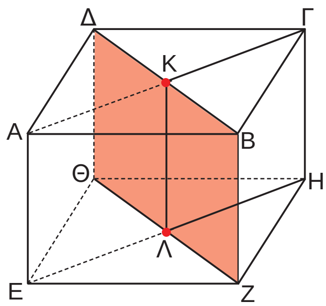
4 Οι αποστάσεις των σημείων Α,Β από το επίπεδο p είναι ΑΑ′=20, ΒΒ′=14. Αν Α′Β′=8, να υπολογίσετε το ΑΒ.



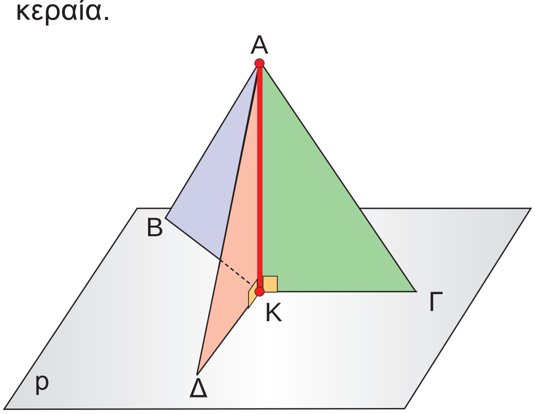
5 Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΑΗ.



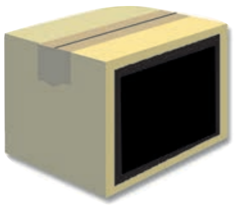
6 Ο παρακάτω κύβος έχει ακμή 12 cm.
α) Να εξηγήσετε γιατί η ΗΓ και η ΛΚ είναι κάθετες στην έδρα ΑΒΓΔ του κύβου.
β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Γ από το γραμμοσκιασμένο επίπεδο.

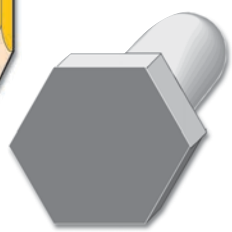


7 Η κεραία ΑΚ του σχήματος, ύψους 12m, είναι τοποθετημένη κάθετα στο επίπεδο του εδάφους. Συγκρατείται με τρία συρματόσχοινα που στερεώνονται στην κορυφή της και στα σημεία Β, Γ, Δ που απέχουν 5 m από το Κ.
Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος των συρματόσχοινων που συγκρατούν την κεραία.



4.2. Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

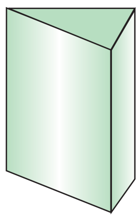




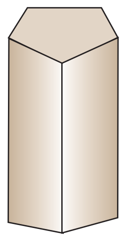
Το ορθό πρίσμα και τα στοιχεία του

Στο φυσικό κόσμο τα αντικείμενα των διπλανών σχημάτων μάς δίνουν την έννοια του ορθού πρίσματος.

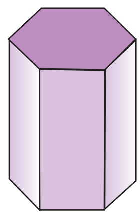
Στη Στερεομετρία τα παρακάτω στερεά σώματα ονομάζονται **ορθά πρίσματα**. Στη συνέχεια, τα ορθά πρίσματα θα τα λέμε απλά **πρίσματα**.



τριγωνικό πρίσμα



πενταγωνικό πρίσμα



εξαγωνικό πρίσμα

Κάθε πρίσμα έχει:

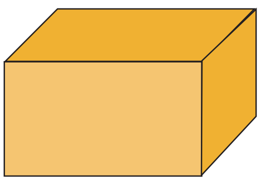
δύο έδρες παράλληλες, που είναι ίσα πολύγωνα και τις άλλες έδρες του που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες**.

Οι δύο παράλληλες έδρες του λέγονται **βάσεις** του πρίσματος.

Οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν την **παράπλευρη επιφάνεια** του πρίσματος. Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται **ακμές**.

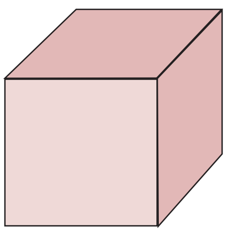
Η απόσταση των δύο βάσεων, που είναι ίση με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας, λέγεται **ύψος** του πρίσματος.

Αν οι βάσεις του πρίσματος είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.ο.κ, τότε αντίστοιχα το πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό** κ.ο.κ.



ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Δύο από τα βασικότερα ορθά πρίσματα είναι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

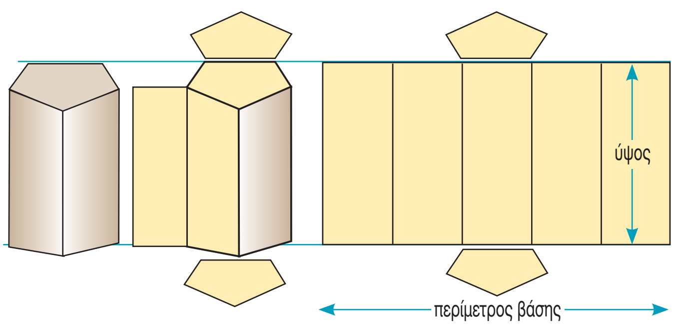


κύβος

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη διαδικασία ανάπτυξης και το τελικό ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός πρίσματος. Ως ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός πρίσματος θεωρούμε το επίπεδο σχήμα που προκύπτει αν «ξεδιπλώσουμε» την παράπλευρη επιφάνειά του και τις βάσεις του.

Η παράπλευρη επιφάνεια σχηματίζει ένα ορθογώνιο, που η μία διάστασή του είναι η περίμετρος της βάσης και η άλλη το ύψος του πρίσματος.

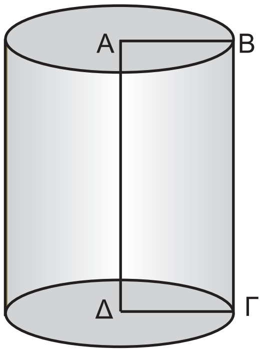


Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

$$E_\pi = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Φυσικά, για να βρούμε το **ολικό εμβαδόν,** πρέπει να προσθέσουμε και τα εμβαδά των δύο βάσεων.

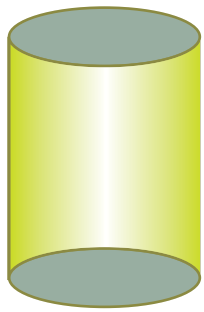
Το ολικό εμβαδόν ενός πρίσματος ($E_{ολ}$) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας E_π και των εμβαδών E_β των δύο βάσεων.
Δηλαδή: $E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta$



Ένας κύλινδρος μπορεί να προκύψει και από την περιστροφή ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ γύρω από μια πλευρά του, π.χ. την ΑΔ, και τότε λέγεται κύλινδρος εκ περιστροφής.
Η πλευρά ΒΓ λέγεται γενέτειρα του κυλίνδρου και ισούται με το ύψος του.

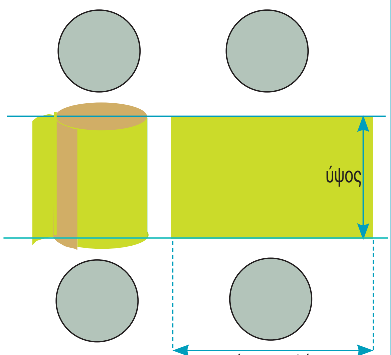
Κύλινδρος

Τα παρακάτω στερεά δίνουν την έννοια του κυλίνδρου.



Ένας κύλινδρος αποτελείται από δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, που είναι οι βάσεις του, και την παράπλευρη επιφάνεια, που, αν την ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου.

Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.



Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου.
Είναι φανερό ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, οπότε ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το ύψος του κυλίνδρου.
Η περίμετρος της βάσης ισούται με το μήκος του κύκλου, δηλαδή $2\pi\rho$.

Το εμβαδόν $Ε_π$ της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου ισούται με την περίμετρο της βάσης (που είναι ίση με 2πρ) επί το ύψος του κυλίνδρου. Δηλαδή

$Ε_π$ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) ή $Ε_π = 2πρ \cdot υ$

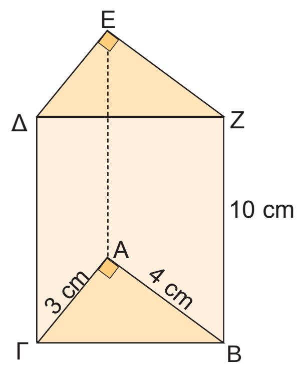
Φυσικά, για να βρούμε το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου, πρέπει στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας να προσθέσουμε τα εμβαδά των δύο βάσεων.

Το ολικό εμβαδόν $Ε_{ολ}$ ενός κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $Ε_π$ και τα εμβαδά $Ε_β$ των δύο βάσεων. Δηλαδή:

$Ε_{ολ} = Ε_π + 2Ε_β$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε πόσο χαρτόνι (σε cm^2) χρειάζεται, για να κατασκευαστεί το πρίσμα του παρακάτω σχήματος, του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm αντίστοιχα και το ύψος είναι 10 cm.



Λύση: Οι βάσεις του πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm.

Η υποτείνουσα ΒΓ υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5$ (cm). Επομένως:

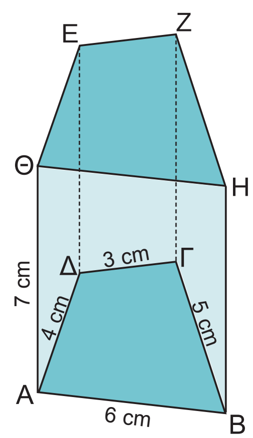
$Ε_β = \frac{1}{2}\, β \cdot υ = \frac{1}{2}\, 3 \cdot 4 = 6$ (cm^2).

$Ε_π$ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) = $12 \cdot 10 = 120$ (cm^2).

$Ε_{ολ} = Ε_π + 2Ε_β = 120 + 2 \cdot 6 = 132$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος που δίνεται στο διπλανό σχήμα.



Λύση: Οι βάσεις του πρίσματος είναι τετράπλευρα με περίμετρο: $3 + 4 + 6 + 5 = 18$ (cm).

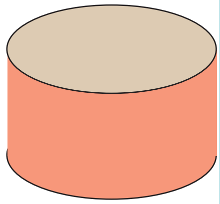
Το ύψος του πρίσματος είναι 7 cm. Άρα, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

$Ε_π$ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) = $18 \cdot 7 = 126$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Κόστος δεξαμενής καυσίμων

Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 20 m και ακτίνα βάσης ρ = 30 m. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει 5 € το τετραγωνικό μέτρο. Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;



Λύση: Πρέπει να βρούμε πόσα τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνας χρησιμοποιήθηκαν (δηλαδή το ολικό εμβαδόν) και να το πολλαπλασιάσουμε με το κόστος 5 € ανά τετραγωνικό μέτρο.

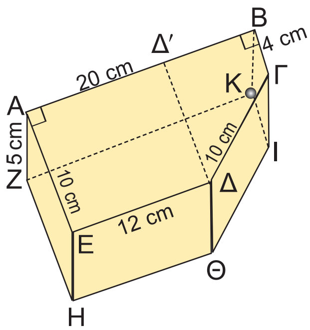
- Η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδόν:
  E_π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος)
  $= 2\pi\rho \cdot \upsilon = 2 \cdot 3,14 \cdot 30 \cdot 20 = 3768$ (m^2).
- Καθεμία από τις βάσεις έχει εμβαδόν: $E_\beta = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 30^2 = 2826$ (m^2).
- Το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου είναι:
  $E_{ολ} = E_\pi + 2 \cdot E_\beta = 3768 + 2 \cdot 2826 = 9420$ (m^2).

Επομένως, το κόστος της λαμαρίνας είναι 9420 · 5 = 47100 €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Η βάση της μηχανής

Το διπλανό κλειστό κουτί κατασκευάζεται από ξύλο και χρησιμεύει ως βάση μιας μηχανής. Να βρείτε την επιφάνεια του ξύλου που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της βάσης.



Λύση: Παρατηρούμε ότι το κουτί είναι ένα πενταγωνικό πρίσμα με βάσεις τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΙΚ.

Η περίμετρος της κάθε βάσης είναι:

ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ = 20 + 4 + 10 + 12 + 10 = 56 (cm).

Το ύψος του πρίσματος είναι υ = ΑΖ = 5 (cm).

Επομένως, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

E_π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) = 56 · 5 = 280 (cm^2).

Για να βρούμε το εμβαδόν της βάσης ΑΒΓΔΕ, τη χωρίζουμε σε δύο μέρη: σε ένα ορθογώνιο ΑΕΔΔ′ και σε ένα τραπέζιο ΒΓΔΔ′. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΔΔ′ είναι ίσο με 10 · 12 = 120 (cm^2). Το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΓΔΔ′ είναι ίσο με:

$$E_{\tau\rho} = \frac{1}{2}(\beta + B) \cdot \upsilon = \frac{1}{2}(4 + 10) \cdot 8 = 56 \ (cm^2).$$

Άρα, το εμβαδόν της βάσης είναι: $E_\beta = 120 + 56 = 176$ (cm^2).

Το ολικό εμβαδόν του πρίσματος είναι:

$$E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta = 280 + 2 \cdot 176 = 280 + 352 = 632 \ (cm^2).$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Ένα πρίσμα με βάση πεντάγωνο έχει:

α) Α: 5 έδρες   Β: 6 έδρες   Γ: 7 έδρες.

β) Α: 8 κορυφές   Β: 10 κορυφές   Γ: 12 κορυφές.

γ) Α: 10 ακμές   Β: 15 ακμές   Γ: 12 ακμές.

2. Δίνεται πρίσμα με βάση τετράγωνο πλευράς 10cm και ύψους 8cm.

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 400 cm^2 Β: 320 cm^2 Γ: 800 cm^2.

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:

Α: 600 cm^2 Β: 520 cm^2 Γ: 800 cm^2.

3. Ένας κύλινδρος έχει διάμετρο βάσης 10cm και ύψος 8cm.

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 40π cm^2 Β: 60π cm^2 Γ: 80π cm^2.

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:

Α: 100π cm^2 Β: 110π cm^2 Γ: 130π cm^2.

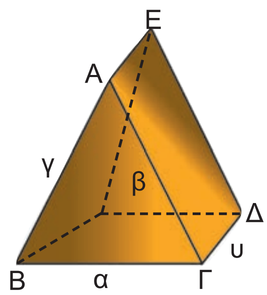
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται η περίμετρος της βάσης, το ύψος και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος.

περίμετρος βάσης	8	7		5	
ύψος υ	5		6		10
Εμβαδόν E_π		70	24	14	5

2 Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας τριγωνικού πρίσματος του οποίου η βάση είναι τρίγωνο με πλευρές α = 3 dm, β = 5 dm, γ = 6 dm και το ύψος 0,8 cm.

3 Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών της βάσης ενός τριγωνικού πρίσματος, υ το ύψος του και E_π το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.



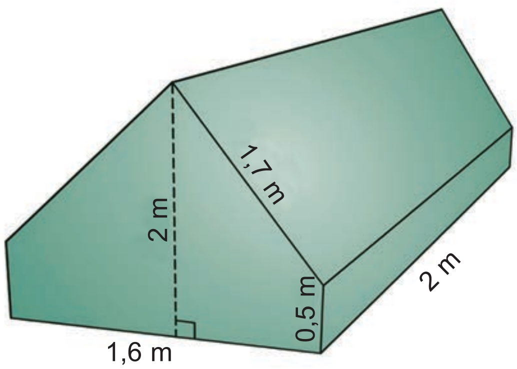
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

α	2	3	8	3	
β	3	5	5		2
γ	4	4		4	4
υ	5		4	8	5
E_π		48	80	80	45

4 Θέλουμε να βάψουμε τους τοίχους ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις:
πλάτος 4 m, μήκος 5 m και ύψος 3 m. Πόσα κιλά χρώμα πρέπει να αγοράσουμε, αν είναι γνωστό ότι ένα κιλό χρώματος καλύπτει περίπου 9 m^2;

5 Να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν πρίσματος με ύψος υ = 20 cm και βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 4 cm.

6 Η σκηνή ενός κάμπινγκ είναι κατασκευασμένη από ύφασμα (μαζί με το δάπεδό της) και έχει διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάστηκαν για την κατασκευή της;



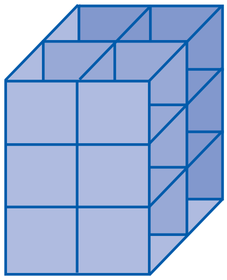
7 Να βρεθεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν ενός κυλίνδρου, όταν:
α) Έχει ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm.
β) Έχει διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 6 cm.
γ) Έχει περίμετρο βάσης 15,7 cm και ύψος 32 cm.
δ) Έχει εμβαδόν βάσης 50,24 cm^2 και ύψος 2 dm.

8 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που συνδέει την ακτίνα της βάσης και το ύψος ενός κυλίνδρου με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν του.

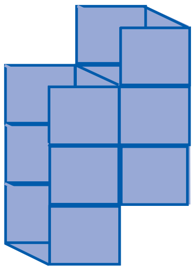
ακτίνα βάσης (cm)	3	2			1
ύψος κυλίνδρου (cm)	5		1		
εμβαδόν E_{π} (cm^2)		50,24	62,8	125,6	
ολικό εμβαδόν (cm^2)				753,6	62,8

9 Το κυλινδρικό κουτί μιας κονσέρβας έχει ύψος 12 cm και ακτίνα βάσης 3 cm. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 0,5 € το τετραγωνικό μέτρο, ενώ το υλικό της παράπλευρης επιφάνειας κοστίζει 0,3 € το τετραγωνικό μέτρο.
Πόσο θα κοστίζει το υλικό όταν πρόκειται να κατασκευάσουμε 1000 κουτιά;

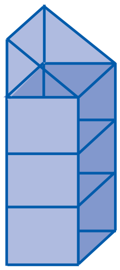
4.3. Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου



V = 12



V = 6



V = 3,5

Η έννοια του όγκου

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα Σ και έναν κύβο με ακμή μήκους μία μονάδα. Ο θετικός αριθμός που δηλώνει με πόσες επαναλήψεις του κύβου ή μέρους του κύβου σχηματίζεται το στερεό σώμα Σ, λέγεται **όγκος** του σώματος.

Μονάδες μέτρησης όγκου

Ως μονάδα μέτρησης όγκου θεωρούμε έναν κύβο με ακμή μήκους 1 μέτρο (m).
Ο όγκος του ισούται με 1 κυβικό μέτρο (m^3).
Οι κυριότερες υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

α) Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1 dm.
Αφού 1m =10 dm, θα ισχύει ότι:
$1 \ m^3 = 10^3 \ dm^3 = 1000 \ dm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι: $1 \ dm^3 = \frac{1}{1000} m^3 = 0{,}001 \ m^3$.

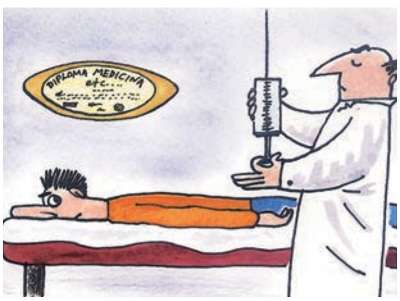
β) Το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1cm. Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm, οπότε
$1 \ m^3 = 10^3 \ dm^3 = 100^3 \ cm^3$.

Αντίστροφα ισχύει ότι: $1 \ cm^3 = \frac{1}{1000} dm^3 = \frac{1}{1000000} m^3$.

γ) Το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) που είναι όγκος κύβου με ακμή 1mm. Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm= 1000 mm, οπότε $1 \ m^3 = 10^3 \ dm^3 = 100^3 \ cm^3 = 1000^3 \ mm^3$.
Αντίστροφα ισχύει ότι:

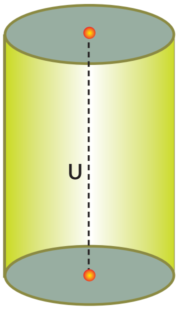
$$1mm^3 = \frac{1}{1000} cm^3 = \frac{1}{1000000} dm^3 = \frac{1}{1000000000} m^3$$

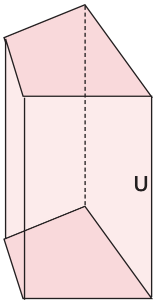
Στον όγκο των υγρών συνηθίζουμε να ονομάζουμε το dm^3 ως λίτρο (ℓ). Τότε, το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο ($m\ell$).



Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Ας θεωρήσουμε μια σύριγγα γεμάτη χρωματισμένο νερό.
Ασκώντας πίεση, το έμβολο διαγράφει το μήκος της σύριγγας έως ότου αδειάσει όλο το νερό.
Είναι φανερό ότι το νερό έχει όγκο ίσο με τον όγκο της κυλινδρικής σύριγγας.
Ο όγκος της σύριγγας διαγράφεται από την κίνηση του εμβαδού του εμβόλου σε όλο το μήκος της.





Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:
Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

Είναι φανερό ότι το ίδιο θα ισχύει, αν στη θέση της κυλινδρικής σύριγγας έχουμε ένα οποιοδήποτε πρίσμα.

Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:
Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) με ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm,
β) με διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 4 cm,
γ) με περίμετρο βάσης 31,4 cm και ύψος 3 cm.

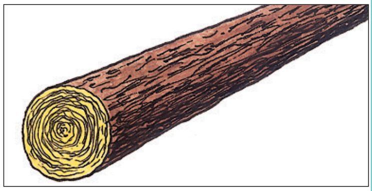
Λύση: α) Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου V του κυλίνδρου και έχουμε:
$V = πρ^2 \cdot υ = π \cdot 3^2 \cdot 5 = 45π = 141,3$ (cm^3).

β) Αφού η διάμετρος είναι δ = 4 cm, η ακτίνα είναι ρ = 2 cm.
Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου κυλίνδρου και έχουμε:
$V = πρ^2 \cdot υ = π \cdot 2^2 \cdot 4 = 16π = 50,24$ (cm^3).

γ) Πρώτα υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου της βάσης:
$L = 2πρ$ ή
$31,4 = 2π \cdot ρ$ ή
$31,4 = 6,28 \cdot ρ$ ή
$ρ = 5$ (cm).
Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου κυλίνδρου και έχουμε:
$V = πρ^2 \cdot υ = π \cdot 5^2 \cdot 3 = 75π = 235,5$ (cm^3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο διπλανός κορμός δέντρου θεωρούμενος ως κύλινδρος έχει μήκος 8 m και διάμετρο βάσης 0,6 m. Η τιμή του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € ανά κυβικό μέτρο. Πόσο αξίζει ο κορμός;



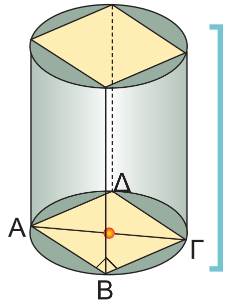
Λύση: Αφού η διάμετρος του κορμού είναι δ = 0,6 m, τότε η ακτίνα του κύκλου της βάσης του κυλίνδρου είναι ρ = 0,3 (m).
Επομένως, ο όγκος του κυλίνδρου είναι:
$V_K = πρ^2 \cdot υ = 3,14 \cdot (0,3)^2 \cdot 8 = 2,26$ (m^3).
Αφού η αξία του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € το κυβικό μέτρο, η αξία του κορμού είναι: $A = 2,26 \cdot 100 = 226$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο πλευράς α (cm) και είναι εγγεγραμμένο σε κύλινδρο με ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης ρ = 3 cm.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά α του τετραγώνου.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου και τον όγκο του πρίσματος.



Λύση: α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα ΑΓ = 2 · ρ = 2· 3 = 6 (cm).
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\alpha^2 + \alpha^2 = 6^2$ ή $2\alpha^2 = 36$ ή $\alpha^2 = 18$.
Άρα: $\alpha = \sqrt{18} = 4{,}24$ (cm).

β) Ο όγκος του κυλίνδρου είναι: $V_{κυλ} = \pi\rho^2 υ = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 10 = 282{,}6$ (cm²).
Ο όγκος του πρίσματος είναι:
$V_{πρ} = E_β \cdot υ = \alpha^2 \cdot υ = 18 \cdot 10 = 180$ (cm²).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος πρίσματος.

εμβαδόν βάσης (cm²)	12	8	
ύψος (cm)	3		6
όγκος (cm³)		56	30

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος κυλίνδρου.

εμβαδόν βάσης (cm²)	22	9	
ύψος (cm)	4		6
όγκος (cm³)		72	120

3. Δίνονται τέσσερις κύλινδροι που έχουν όλοι ακτίνα βάσης ρ=4 cm. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	1ος Κύλινδρος	2ος Κύλινδρος	3ος Κύλινδρος	4ος Κύλινδρος
ύψος κυλίνδρου υ	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_π$				
ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$				
όγκος V				

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 4 cm έχει ύψος ίσο με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.
Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος,
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του,
γ) τον όγκο του πρίσματος.

2 Δίνεται πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι τετραπλάσιο από την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου της βάσης του και η παράπλευρη επιφάνειά του έχει εμβαδόν 432 cm^2, να υπολογίσετε τον όγκο του.

3 Ένα τετραγωνικό πρίσμα έχει ολικό εμβαδόν που είναι τριπλάσιο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειάς του.
Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου της βάσης του είναι τετραπλάσια από το ύψος του πρίσματος.

4 Ένα πρίσμα έχει βάση ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, με ίσες πλευρές ΑΔ = ΒΓ = 5 cm. Το ύψος του τραπεζίου είναι 3 cm και το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm. Αν ο όγκος του πρίσματος είναι 180 cm^3 και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 220 cm^2, να βρείτε:
α) το εμβαδόν και την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ,
β) τα μήκη των βάσεων ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

5 Λυγίζουμε ένα φύλλο χαρτιού μεγέθους Α4 (21x29cm) και κατασκευάζουμε έναν κύλινδρο ύψους 21cm.
Να βρείτε την ακτίνα βάσης και τον όγκο του κυλίνδρου.

6 Να βρείτε τον όγκο κυλίνδρου ο οποίος έχει:
α) ακτίνα βάσης 10 cm και ύψος 1,2 cm.
β) εμβαδόν βάσης 100 mm^2 και ύψος 0,2 m.

7 Ένα τσιγάρο έχει μήκος 8,5 cm από τα οποία τα 2,5 cm καταλαμβάνει το φίλτρο. Η διάμετρος μιας βάσης του είναι 0,8 cm. Οι αναλύσεις του Υπουργείου Υγείας κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι περιέχει 0,5 mg πίσσας ανά κυβικό εκατοστό καπνού και ότι το τσιγαρόχαρτο περιέχει 0,05 mg πίσσας ανά τετραγωνικό εκατοστό χαρτιού.
Πόσα mg πίσσας εισπνέει ημερησίως ένας καπνιστής που καπνίζει 15 τσιγάρα την ημέρα;
(Να θεωρήσετε ότι ο καπνιστής πετάει το τσιγάρο έχοντας καπνίσει τα 5 από τα 6 cm του τσιγάρου).

4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

Από την αρχαιότητα οι άνθρωποι έκτιζαν μνημεία με τη μορφή πυραμίδας.

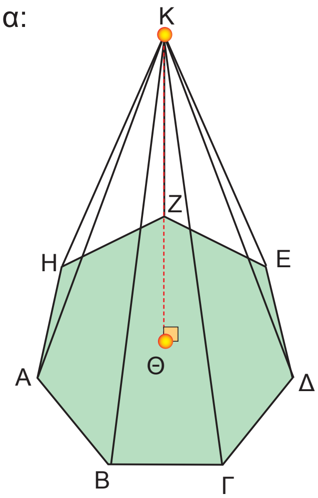
Οι τάφοι των βασιλέων της αρχαίας Αιγύπτου είχαν τη γνωστή σ' εμάς μορφή της πυραμίδας.

Οι Αζτέκοι και οι Ίνκας είχαν χτίσει, επίσης, ναούς στο σχήμα πυραμίδας, αρκετοί από τους οποίους σώζονται μέχρι σήμερα.

Στην είσοδο του μουσείου του Λούβρου, στο Παρίσι, υπάρχει μια σύγχρονη πυραμίδα που σχεδιάστηκε το 1989 από τον αρχιτέκτοντα Γιέο Μιγκ Πέι.

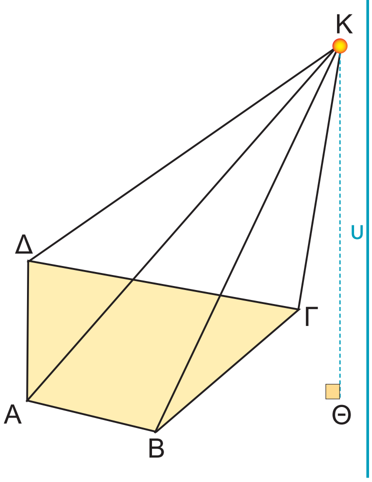
Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

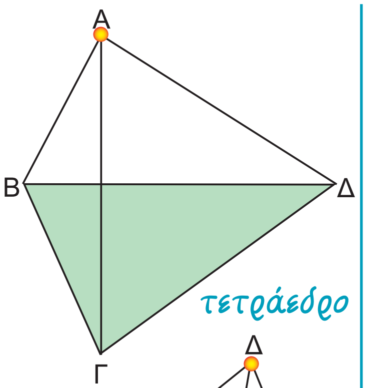
Για παράδειγμα, μια πυραμίδα με μια έδρα το επτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



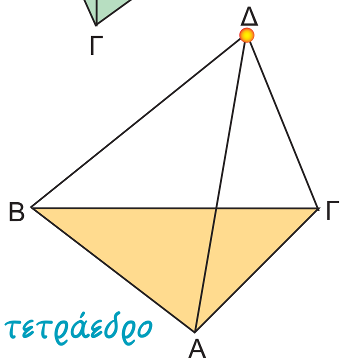
Τα στοιχεία της πυραμίδας

- Το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ λέγεται **βάση** της πυραμίδας.
- Τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το σημείο Κ: ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΗ και ΚΗΑ λέγονται **παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας.
- Το κοινό σημείο Κ των παράπλευρων εδρών λέγεται **κορυφή** της πυραμίδας.
- Αν από την κορυφή Κ φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΚΘ προς τη βάση, τότε το ΚΘ λέγεται **ύψος** της πυραμίδας.
  Παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα ότι το ύψος μιας πυραμίδας μπορεί να βρίσκεται και εκτός της πυραμίδας.
- Μια πυραμίδα που έχει ως βάση ένα τρίγωνο, λέγεται **τριγωνική πυραμίδα**.





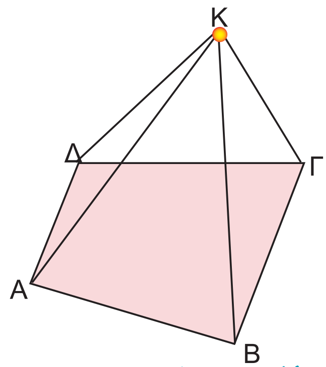
τετράεδρο



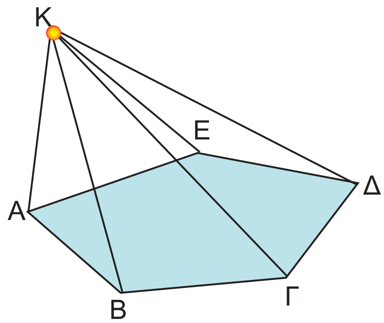
τετράεδρο

Επειδή όμως η τριγωνική πυραμίδα έχει τέσσερις τριγωνικές έδρες και οποιαδήποτε έδρα της μπορεί να θεωρηθεί ως βάση, τη λέμε και **τετράεδρο**.

- Μια πυραμίδα που έχει βάση τετράπλευρο λέγεται **τετραπλευρική**.
- Μια πυραμίδα που έχει βάση πεντάγωνο λέγεται **πενταγωνική** κ.ο.κ.

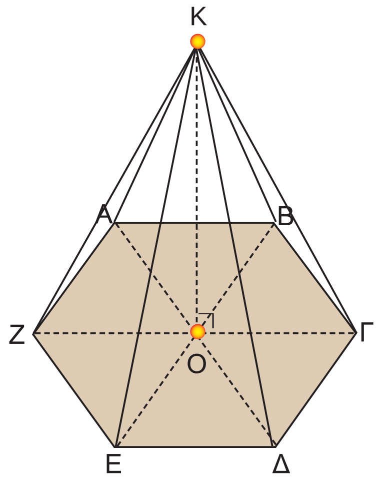


τετραπλευρική πυραμίδα



πενταγωνική πυραμίδα

Κανονική πυραμίδα

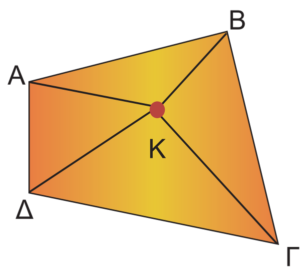


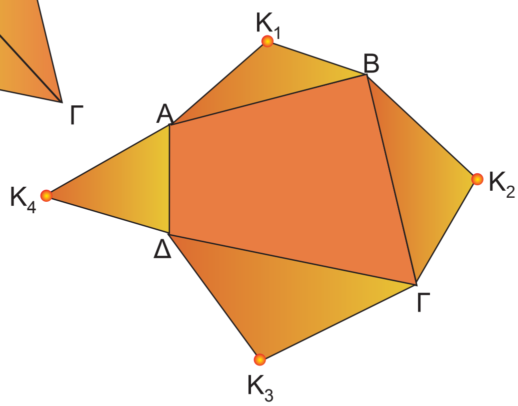
- Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Σε οποιαδήποτε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα (ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΑ).

  Αντίστροφα, αν οι παράπλευρες έδρες μίας πυραμίδας με βάση κανονικό πολύγωνο είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τότε η πυραμίδα είναι κανονική.

Εμβαδόν επιφάνειας πυραμίδας

Η ολική επιφάνεια της πυραμίδας αποτελείται από δύο μέρη: την επιφάνεια των παράπλευρων εδρών της, που ονομάζεται **παράπλευρη** επιφάνεια και την επιφάνεια της βάσης της.





Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $E_П$ μιας πυραμίδας, υπολογίζουμε το εμβαδόν κάθε παράπλευρης έδρας (που είναι τρίγωνο) και προσθέτουμε τα εμβαδά αυτά.

Επομένως, στο διπλανό σχήμα έχουμε:

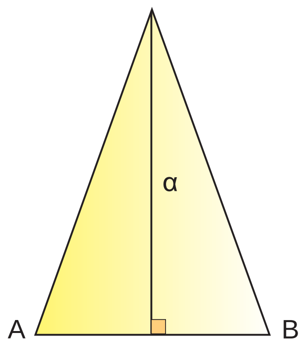
$E_{\Pi} = (K_1AB) + (K_2B\Gamma) + (K_3\Gamma\Delta) + (K_4\Delta A)$.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{ο\lambda}$ της πυραμίδας, προσθέτουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδόν της βάσης E_{β}.

$$E_{ο\lambda} = E_{\Pi} + E_{\beta}$$

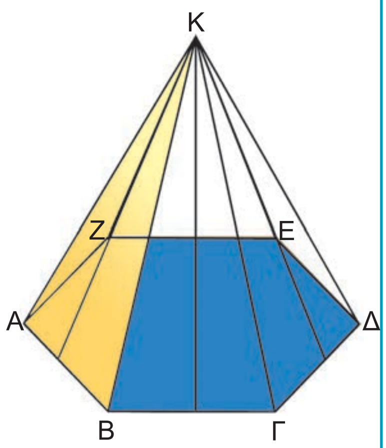
Στο προηγούμενο σχήμα έχουμε ότι:

$E_{ο\lambda} = E_{\Pi} + E_{\beta} = (K_1AB) + (K_2B\Gamma) + (K_3\Gamma\Delta) + (K_4\Delta A) + (AB\Gamma\Delta)$.



Εμβαδόν επιφάνειας κανονικής πυραμίδας

Όταν η πυραμίδα είναι κανονική, τότε η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν όλα ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Καθένα από αυτά τα ύψη λέγεται **απόστημα** της κανονικής πυραμίδας.



Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας:

$E_{\Pi} = (KAB) + (KB\Gamma) + (K\Gamma\Delta) + (K\Delta E) + (KEZ) + (KZA) = 6(KAB)$.

Άρα: $E_{\Pi} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot AB) \cdot \alpha$.

Όμως, η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου ισούται με $6 \cdot AB$.

Τελικά, καταλήγουμε ότι:

$E_{\Pi} = \frac{1}{2}$ (περίμετρος εξαγώνου) · απόστημα.

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει τελικά για κάθε κανονική πυραμίδα:

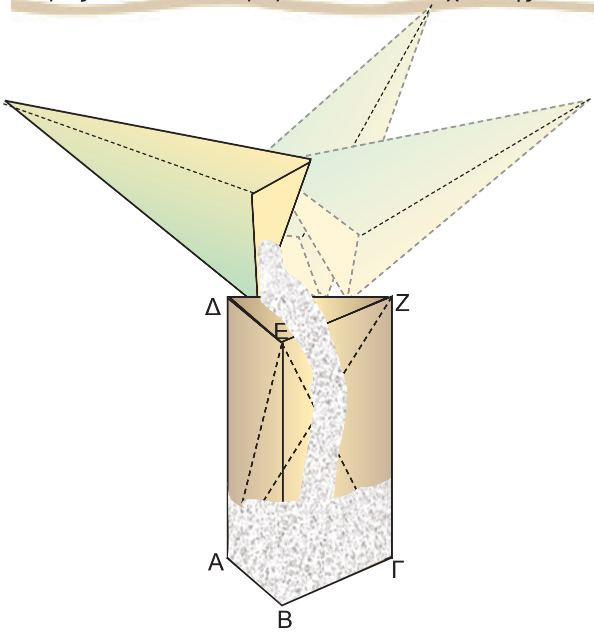
$$E_{\Pi} = \frac{1}{2}\,(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot \text{απόστημα}$$

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της κανονικής πυραμίδας, αρκεί να προσθέσουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_{Π} και το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου, που αποτελεί τη βάση της κανονικής πυραμίδας.

Όγκος πυραμίδας

Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα πρίσμα και μια πυραμίδα, έτσι ώστε να έχουν βάσεις ίσα τρίγωνα και ίσα ύψη.

Αν γεμίσουμε διαδοχικά τρεις φορές με αλεύρι την πυραμίδα και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στο πρίσμα, θα δούμε ότι το πρίσμα γεμίζει τελείως. Η διαπίστωση αυτή ισχύει γενικότερα.



Επομένως, ο όγκος της πυραμίδας ισούται με το $\frac{1}{3}$ του όγκου του πρίσματος.

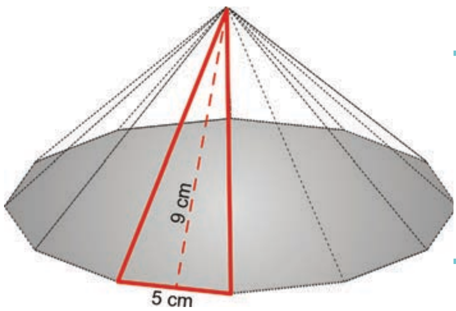
Ο όγκος V της πυραμίδας ισούται με:

$V = \frac{1}{3}$ (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

Ο ίδιος τύπος ισχύει για τον όγκο μιας πυραμίδας με βάση οποιοδήποτε πολύγωνο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση κανονικό δωδεκάγωνο με πλευρά 5 cm. Αν το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της είναι 9 cm, να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.



Λύση: Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot$ (περίμετρος βάσης) $\cdot$ (απόστημα).

Η περίμετρος της βάσης είναι: $12 \cdot 5 = 60$ (cm) και το απόστημα 9 cm.

Άρα: $E_\pi = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 9 = 270$ (cm^2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

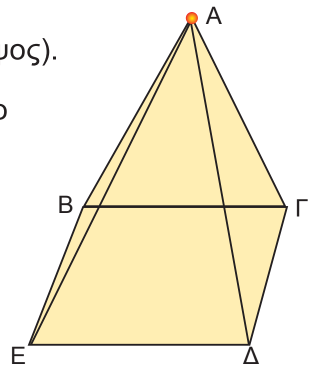
Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 8 cm και ύψος 12 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Λύση: Ο όγκος της πυραμίδας είναι: $V = \frac{1}{3} \cdot$ (εμβαδόν βάσης) · (ύψος).

Αφού η πυραμίδα είναι κανονική, η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς 8 cm, οπότε το εμβαδόν της βάσης είναι:

$E_\beta = 8^2 = 64$ (cm^2).

Επομένως, $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 12 = 256$ (cm^3).



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

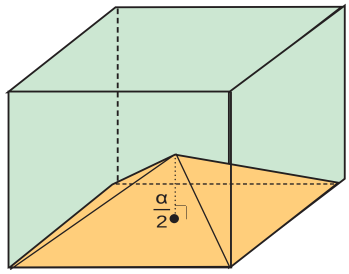
Από έναν κύβο που έχει ακμή α = 10 cm, αφαιρούμε μια πυραμίδα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που απομένει.

Λύση: Ο όγκος V του στερεού που απομένει, θα βρεθεί, αν από τον όγκο V_K του κύβου αφαιρέσουμε τον όγκο V_Π της πυραμίδας. Έχουμε ότι:

$V_K = \alpha^3 = 10^3 = 1000$ (cm^3)

$V_\Pi = \frac{1}{3}E_\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6} \cdot \alpha^3 = \frac{1000}{6} = 166{,}67$ (cm^3).

Άρα: $V = V_K - V_\Pi = 1000 - 166{,}67 = 833{,}33$ (cm^3).



$\frac{\alpha}{2}$ ύψος της πυραμίδας

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Το έτος 3.000 π.Χ. περίπου οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκτισαν την πυραμίδα του Χέοπα, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς 233 m και παράπλευρη ακμή 220 m (περίπου).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αυτής της πυραμίδας.

β) Αν γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 146 m, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

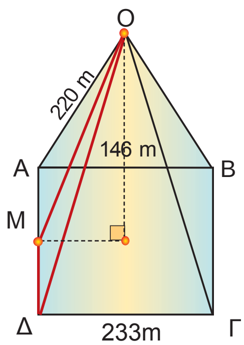
Λύση: α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας δίνεται από τον τύπο: $E_\Pi = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα).

Για να υπολογίσουμε το απόστημα ΟΜ της πυραμίδας, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΜΔ:

$ΟΜ^2 = ΟΔ^2 - ΔΜ^2$, δηλαδή

$ΟΜ^2 = 220^2 - 116{,}5^2 = 34827{,}75$.

Οπότε: ΟΜ = 186,62 m.



Άρα: $E_\pi = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα)

$= \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 233) \cdot 186{,}62 =$

$= \frac{1}{2} 932 \cdot 186{,}62 = 86964{,}92$ (m^2).

β) Ο όγκος είναι: $V = \frac{1}{3}$ (εμβαδόν βάσης) · (ύψος), με εμβαδόν βάσης:

$E_\beta = 233^2 = 54289$ (m^2).

Επομένως: $V = \frac{1}{3} \cdot 54289 \cdot 146 = 2642064{,}6$ (m^3).

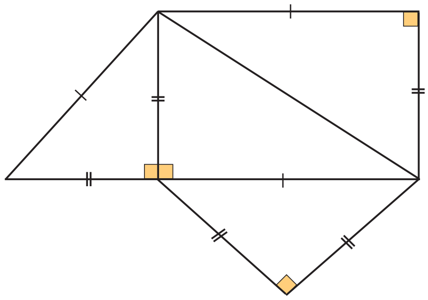
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

1. Η τετραγωνική πυραμίδα και το τετράεδρο έχουν το ίδιο πλήθος εδρών.

2. Κάθε κανονική τριγωνική πυραμίδα είναι κανονικό τετράεδρο.

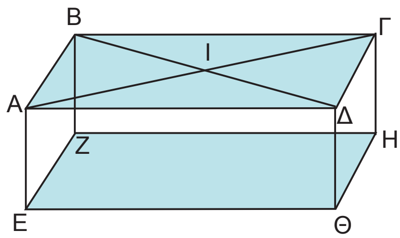
3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ανάπτυγμα πυραμίδας.



4. Ο αριθμός των εδρών μιας πυραμίδας είναι πάντα άρτιος αριθμός.

5. Σε μια πυραμίδα το ύψος βρίσκεται πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια.

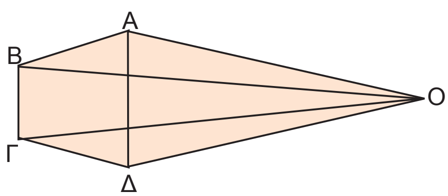
6. Στο παρακάτω σχήμα, οι πυραμίδες ΙΕΖΗΘ και ΗΑΒΖΕ έχουν τον ίδιο όγκο.



7. Ο λόγος των όγκων μιας πυραμίδας και ενός πρίσματος με ίδια βάση και ίσα ύψη είναι:
Α: $\frac{1}{2}$ Β: 2 Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{4}$. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

8. Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι τρίγωνα:
Α: Ισόπλευρα Β: Ισοσκελή Γ: Ορθογώνια Δ: Σκαληνά
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Η πυραμίδα του διπλανού σχήματος έχει βάση:
Α: ΟΓΔ Β: ΟΒΓ Γ: ΑΒΓΔ Δ: ΟΑΒ
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αφορά στα στοιχεία μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας.

ύψος (cm)	8		6
πλευρά βάσης (cm)	12	8	
απόστημα (cm)	10		8
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας (cm^2)			169,32
όγκος (cm^3)		256	

2 Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 12 cm και ύψος 10 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

3 Μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 9 cm και απόστημα 12 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

4 Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm και το ύψος της παράπλευρης έδρας της είναι 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν:

α) της παράπλευρης επιφάνειας,

β) της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

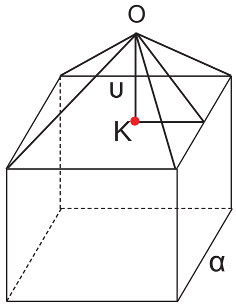
5 Μια τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 700 cm^3 και ύψος 17 cm. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου της βάσης της.

6 Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει απόστημα 10 cm και πλευρά βάσης 16 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της και τον όγκο της.

7 Ένα τετράεδρο έχει όλες τις ακμές του ίσες με 6 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

8 Ο όγκος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι εννεαπλάσιος από τον όγκο μίας άλλης κανονικής πυραμίδας με την οποία έχει το ίδιο ύψος. Να βρείτε τον λόγο των πλευρών των βάσεών τους.

9 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύβος πλευράς α = 10 cm και μια πυραμίδα με βάση μία έδρα του κύβου και ύψος υ = 6 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.



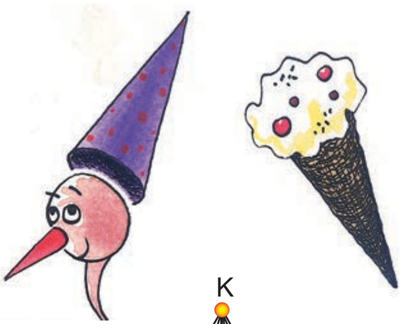
10 Μια κανονική πυραμίδα με βάση εξάγωνο έχει ύψος 8 cm και παράπλευρη ακμή 10 cm. Να υπολογίσετε:

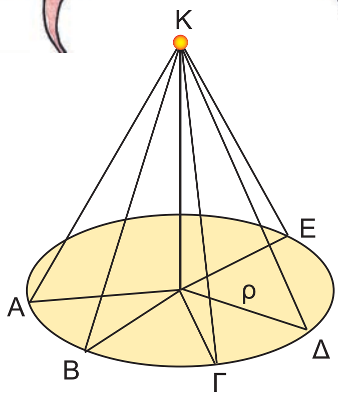
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας,

β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας,

γ) τον όγκο της πυραμίδας.

4.5. Ο κώνος και τα στοιχεία του

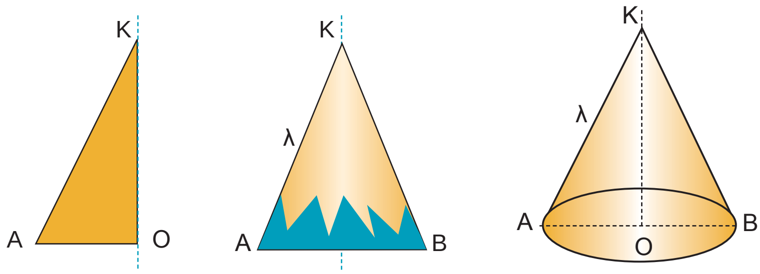




Στην καθημερινή μας ζωή έχουμε συναντήσει συχνά την εικόνα ενός κώνου. Πώς μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε προσεγγιστικά έναν κώνο;

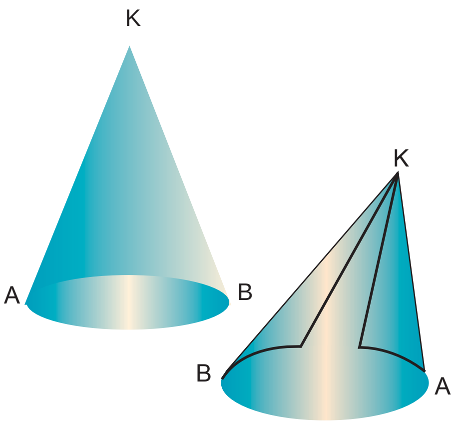
Παίρνουμε ένα κυκλικό στεφάνι ακτίνας ρ. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε από χαρτόνι ίσα ορθογώνια τρίγωνα με μια κάθετη πλευρά ίση με την ακτίνα ρ του στεφανιού. Κολλάμε γύρω από ένα ξυλάκι όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που κόψαμε, έτσι ώστε να έχουν την ίδια κορυφή Κ και οι βάσεις τους να «πατάνε» στο στεφάνι.

Αν «ντύσουμε» με ύφασμα ή χαρτί το σχήμα που κατασκευάσαμε, τότε εμφανίζεται ένας κώνος.



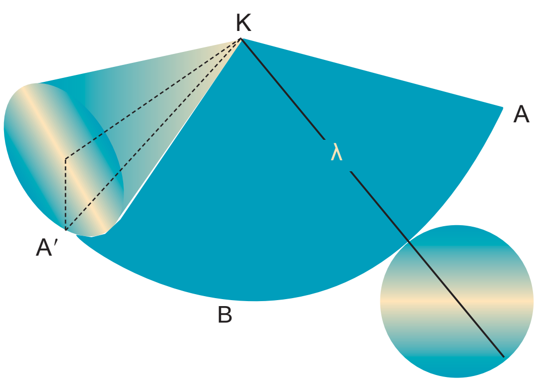
Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου ΚΟΑ γύρω από μία κάθετη πλευρά του ΚΟ.

Η βάση του κώνου είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ, την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου ΚΟΑ. Η ακτίνα ΟΑ = ρ λέγεται **ακτίνα του κώνου**.



Η κάθετη πλευρά ΚΟ γύρω από την οποία περιστρέψαμε το ορθογώνιο τρίγωνο, λέγεται **ύψος** του κώνου. Η υποτείνουσα ΚΑ του ορθογωνίου τριγώνου λέγεται **γενέτειρα** του κώνου και το μήκος της συμβολίζεται με **λ**.

Η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή τής γενέτειρας ΚΑ είναι η **παράπλευρη επιφάνεια** του κώνου.



Εμβαδόν επιφάνειας κώνου

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $Ε_Π$ του κώνου, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ανάπτυγμά της προκύπτει «ξετυλίγοντας» τον κώνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

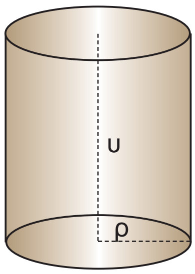
Παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου ισούται με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ακτίνας λ με μήκος τόξου $\overset{\frown}{AA'} = 2\pi\rho$.

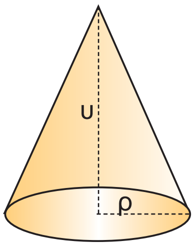
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα, που έχει ακτίνα τη γενέτειρα λ του κώνου και μήκος τόξου το μήκος του κύκλου της βάσης του κώνου.

Οπότε: $E_\Pi = \frac{1}{2} \cdot (2\pi\rho) \cdot \lambda$ ή $\boxed{E_\Pi = \pi \cdot \rho \cdot \lambda}$

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου, αρκεί στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_Π να προσθέσουμε και το εμβαδόν της βάσης του: $\mathbf{E_B = \pi\rho^2}$.

Οπότε: $\boxed{E_{ολ} = E_\Pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2}$

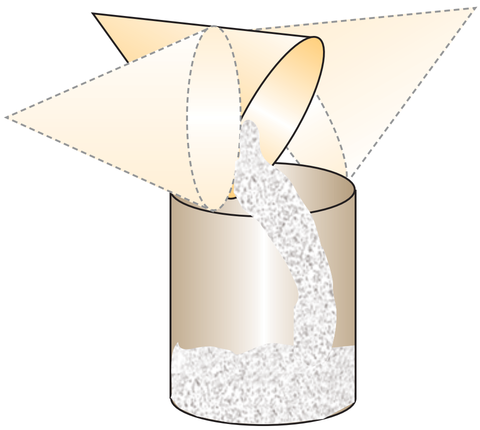




Όγκος κώνου

Κατασκευάζουμε με χαρτόνι έναν κώνο και έναν κύλινδρο, έτσι ώστε να έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $\pi\rho^2 υ$.

Αν γεμίσουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τον κώνο και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στον κύλινδρο, θα δούμε ότι ο κύλινδρος γεμίζει τελείως.

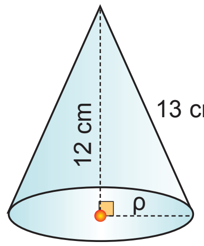


Επομένως, ο όγκος του κώνου είναι το $\frac{1}{3}$ του όγκου του κυλίνδρου. Δηλαδή:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 υ}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον όγκο ενός κώνου με γενέτειρα λ = 13 cm και ύψος 12 cm.



Λύση: Έχουμε ότι: $\rho^2 = \lambda^2 - \upsilon^2 = 13^2 - 12^2 = 25$ άρα $\rho = 5$ (cm) και

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 12 = 314 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

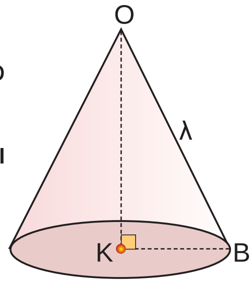
Η διάμετρος της βάσης ενός κώνου είναι 12 cm και το ύψος του 8 cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας,
β) τον όγκο του.

Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι $E_\Pi = \pi \cdot \rho \cdot \lambda$.

Για να βρούμε το μήκος της γενέτειρας λ, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΒ:

$OB^2 = OK^2 + KB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, άρα $\lambda = OB = 10$ cm και

$E_\Pi = 3{,}14 \cdot 6 \cdot 10 = 188{,}4$ (cm^2).

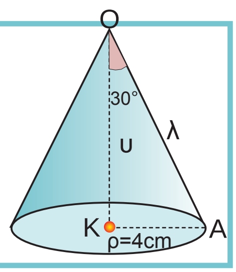


β) Έχουμε ότι:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 8 = 301{,}44 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στον κώνο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας,
β) τον όγκο του κώνου.



Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε:

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{\rho}{\lambda} \text{ ή } \frac{1}{2} = \frac{4}{\lambda} \text{ ή } \lambda = 8 \text{ (cm) και}$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\upsilon}{\lambda} \text{ ή } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\upsilon}{8} \text{ ή } 2\upsilon = 8\sqrt{3} \text{ ή } \upsilon = 4\sqrt{3} = 6{,}93 \text{ (cm)}.$$

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι:

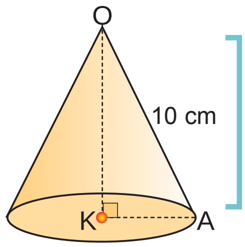
$E_{o\lambda} = E_\Pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2 = \pi \cdot 4 \cdot 8 + \pi \cdot 4^2 = 48\pi = 48 \cdot 3{,}14 = 150{,}72$ (cm^2).

β) Ο όγκος του κώνου είναι:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 6{,}93 = 116{,}05 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας κώνος έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 251,2 cm^2 και γενέτειρα με μήκος 10 cm. Να υπολογίσετε:
α) την ακτίνα της βάσης του, β) το ύψος του, γ) τον όγκο του.



Λύση: α) Έχουμε ότι $E_{\Pi} = \pi\rho\lambda$ ή $\rho = \dfrac{E_{\Pi}}{\pi \cdot \lambda}$ ή $\rho = \dfrac{251{,}2}{3{,}14 \cdot 10} = 8$, άρα $\rho = 8$ (cm).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε $OK^2 = OA^2 - AK^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, άρα $\upsilon = OK = 6$ (cm).

γ) Ο όγκος του κώνου είναι ίσος με: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \dfrac{1}{3} 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 6 = 401{,}92$ (cm^2).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

1. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι τρίγωνο.
2. Η γενέτειρα λ, το ύψος υ και η ακτίνα ρ του κώνου ικανοποιούν τη σχέση $\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2$.
3. Η γενέτειρα ενός κώνου είναι πάντα μεγαλύτερη από την ακτίνα.
4. Η βάση ενός κώνου είναι κυκλικός δίσκος.
5. Η ακτίνα της βάσης ενός κώνου είναι 6 cm και το ύψος του 8 cm. Η γενέτειρά του είναι:
   Α: 10 dm Β: 10 cm Γ: 12 m Δ: 6 cm.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
6. Ο όγκος του κώνου είναι 12π m^3 και η ακτίνα του 3 m. Το ύψος του είναι:
   Α: π m Β: 6 m Γ: 4 m Δ: 4π m.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
7. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης ενός κώνου, τότε η παράπλευρη επιφάνεια:
   Α: διπλασιάζεται Β: τετραπλασιάζεται Γ: παραμένει ίδια.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
8. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης ενός κώνου, τότε ο όγκος του κώνου:
   Α: διπλασιάζεται Β: τετραπλασιάζεται Γ: παραμένει ίδιος
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
9. Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι κυκλικός τομέας με ακτίνα 12 cm και γωνία 60°. Η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι:
   Α: 4 cm Β: 3 dm Γ: 2 cm Δ: 2 dm.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
10. Αν διπλασιάσουμε το ύψος ενός κώνου, τότε ο όγκος του:
    Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: τετραπλασιάζεται.
    Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Συμπληρώστε τα στοιχεία του κώνου που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

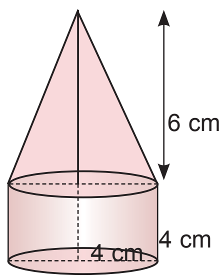
Ύψος (cm)	4	8	10	
Ακτίνα βάσης (cm)	3		4	
Γενέτειρα (cm)		10		9
Όγκος (cm³)				
Παράπλευρη επιφάνεια (cm²)				169,56

2 Ένας κώνος έχει όγκο $V = 1\ m^3$.
Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου:
α) με διπλάσιο ύψος (μόνο),
β) με διπλάσια ακτίνα βάσης (μόνο),
γ) με διπλάσιο ύψος και διπλάσια ακτίνα βάσης.

3 Ένα δοχείο με σχήμα κώνου που έχει ύψος 20 cm και ακτίνα βάσης 10 cm είναι γεμάτο νερό. Αδειάζουμε το παραπάνω δοχείο σε ένα άλλο δοχείο, που έχει σχήμα κύβου με ακμή 20 cm. Να εξετάσετε αν θα ξεχειλίσει το νερό ή όχι.

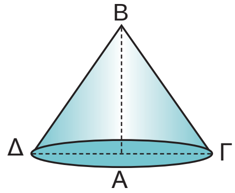
4 Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κωνική σκηνή, η οποία να έχει όγκο τουλάχιστον 20 m³. Αν το ύψος της σκηνής είναι 3 m, πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της βάσης;

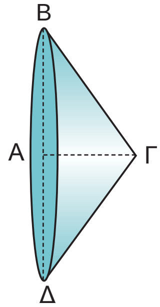
5 Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού στο διπλανό σχήμα.



6 Δύο στερεοί κώνοι έχουν κοινή βάση με ακτίνα 4 cm και ύψη 8 cm και 12 cm αντίστοιχα. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.

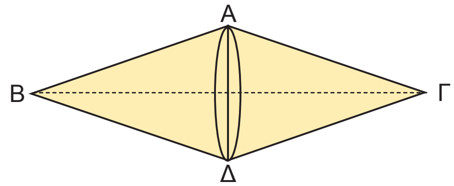
7 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90°$) στρέφεται πρώτα γύρω από την πλευρά ΑΒ και έπειτα γύρω από την πλευρά ΑΓ, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



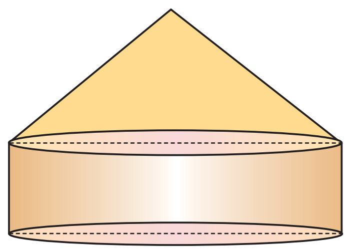


Να υπολογίσετε:
α) τον λόγο των παράπλευρων επιφανειών των δύο κώνων που σχηματίζονται,
β) τον λόγο των όγκων τους.

8 Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ περιστρέφεται γύρω από τη βάση του ΒΓ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν ΒΓ=24 cm και ΑΒ=13 cm, να υπολογίσετε:
α) την ολική επιφάνεια του στερεού που σχηματίζεται,
β) τον όγκο του.



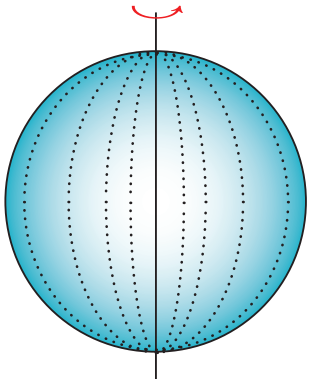
9 Η στέγη της κεντρικής σκηνής ενός τσίρκου έχει σχήμα κώνου με διάμετρο βάσης 40 m και ύψος 15 m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα πλαστικοποιημένου υφάσματος χρειάστηκαν για την κατασκευή της;



10 Μια κλεψύδρα σχήματος κώνου «μετρά» τον χρόνο αδειάζοντας 4 cm³ άμμο το λεπτό (min). Αν η ακτίνα της βάσης είναι 5 cm και το ύψος 9,17 cm, να βρείτε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει τελείως η κλεψύδρα.

4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της

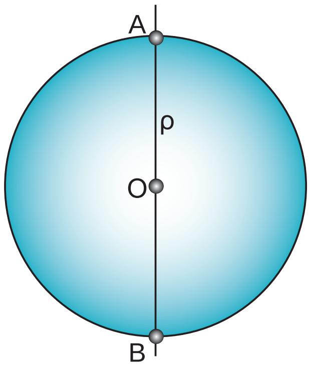
Τα διπλανά σχήματα μάς δίνουν την έννοια της σφαίρας. Αν έχουμε έναν κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) και τον περιστρέψουμε γύρω από μία διάμετρο του ΑΒ, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται μια σφαίρα.



Σφαίρα λέγεται το στερεό σώμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) γύρω από μία διάμετρό του.

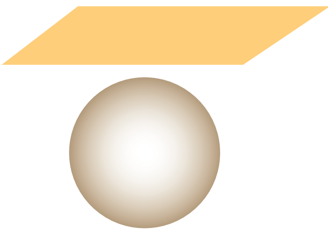
Κατά την περιστροφή ο κύκλος δημιουργεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.

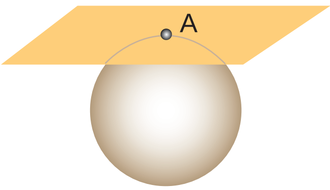
Επομένως, η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας μιας σφαίρας από το κέντρο Ο είναι ίση με την ακτίνα ρ. Το σημείο **Ο** λέγεται **κέντρο της σφαίρας** και η ακτίνα **ρ** του κύκλου λέγεται ακτίνα της σφαίρας.

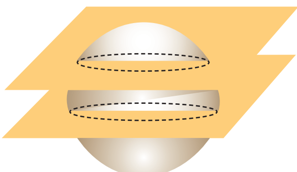


Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας

Μία σφαίρα και ένα επίπεδο στον χώρο έχουν τη δυνατότητα να τοποθετηθούν κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα:

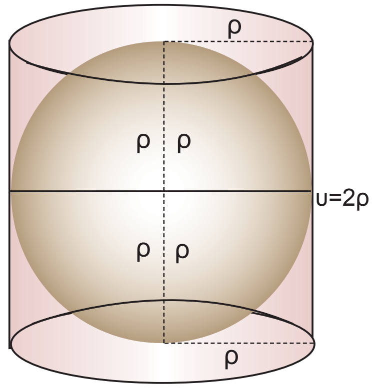






α) Να μην τέμνονται μεταξύ τους.
β) Να εφάπτονται σε ένα σημείο.
γ) Να τέμνονται σε κυκλικό δίσκο.

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος που αποτελεί την τομή του επιπέδου με τη σφαίρα, «μεγαλώνει» όσο το επίπεδο «πλησιάζει» στο κέντρο της σφαίρας. Όταν το κέντρο της σφαίρας ανήκει στο επίπεδο, τότε ο κύκλος στον οποίο τέμνονται ονομάζεται **μέγιστος κύκλος της σφαίρας**.



Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας

Όπως είδαμε, η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή ενός κύκλου (Ο, ρ) γύρω από μια διάμετρό του, αποτελεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.

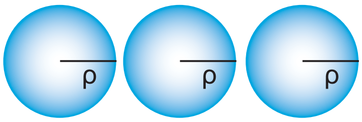
Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες με τον Αρχιμήδη υπολόγισαν το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας και μάλιστα συγκρίνοντάς την με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου!

Ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι, αν μια σφαίρα «εγγράφεται» σε κύλινδρο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

Επομένως: $E_{\sigma\varphi} = 2\pi\rho \cdot \upsilon = 2\pi\rho \cdot 2\rho$ ή $\boxed{E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2}$

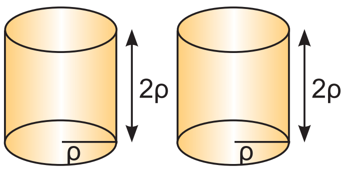
Το προηγούμενο συμπέρασμα διατυπώνεται και ως εξής:

Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της.



Όγκος της σφαίρας

Ας κατασκευάσουμε μια σφαίρα ακτίνας ρ και δύο κυλίνδρους με βάση κύκλο ακτίνας ρ και ύψος υ = 2ρ.
Γεμίζουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τη σφαίρα και αδειάζουμε το αλεύρι στους δύο κυλίνδρους.
Τελειώνοντας βλέπουμε ότι οι δύο κύλινδροι είναι τελείως γεμάτοι. Επομένως, ο τριπλάσιος όγκος σφαίρας ακτίνας ρ ισούται με τον διπλάσιο όγκο κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ = 2ρ:



$$3V_{\sigma\varphi} = 2V_{\kappa} \quad \text{ή} \quad V_{\sigma\varphi} = \frac{2}{3}V_{\kappa} = \frac{2}{3}\pi\rho^2 \cdot (2\rho) \quad \text{ή}$$

$$\boxed{V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi\rho^3}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται σφαίρα ακτίνας ρ = 2 cm. Να βρείτε:
α) το εμβαδόν Ε της επιφάνειάς της,
β) τον όγκο της.

Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι: $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 50{,}24$ (cm²).

β) Γνωρίζουμε ότι: $V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi\rho^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^3 = 33{,}49$ (cm³).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι 144π (m²). Να βρείτε τον όγκο της.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι: $E_{σφ} = 4πρ^2$, οπότε $144π = 4πρ^2$ ή $36 = ρ^2$ ή $ρ = 6$ (m).

Από τον τύπο υπολογισμού του όγκου της σφαίρας έχουμε:

$$V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3 = \frac{4}{3}π \cdot 6^3 = 904{,}32 \ (m^3).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε πόσα χρήματα θα χρειαστούμε, για να βάψουμε μία σφαιρική δεξαμενή διαμέτρου δ = 20 m, αν το ένα κιλό χρώμα κοστίζει 8 € και καλύπτει επιφάνεια 4 m².

Λύση: Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4π \cdot 10^2 = 1256$ (m²).

Αφού κάθε κιλό χρώμα καλύπτει 4 m², για να καλυφθεί η επιφάνεια των 1256 m² της σφαίρας χρειάζονται $\frac{1256}{4} = 314$ κιλά χρώμα που κοστίζουν συνολικά $314 \cdot 8 = 2512$ €.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

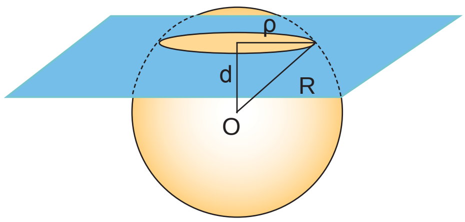
Να βρείτε το εμβαδόν της τομής επιπέδου και σφαίρας κέντρου Ο και ακτίνας R = 5 cm, όταν το επίπεδο απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση d = 3 cm.

Λύση: Αφού το επίπεδο απέχει απόσταση από το κέντρο της σφαίρας μικρότερη από την ακτίνα της, τότε η τομή είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας:

$ρ = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ (cm).

Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι:

$E = πρ^2 = π \cdot 4^2 = 50{,}24$ (cm²).



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1.	Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου της.		
2.	Σε μια σφαίρα ακτίνας 3 cm το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος της εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό.		
3.	Η τομή σφαίρας και επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος.		
4.	Η τομή σφαίρας και επιπέδου που δε διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος.		
5.	Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το γινόμενο του μήκους ενός μέγιστου κύκλου της με τη διάμετρο αυτής.		

6. Δύο σφαίρες με ακτίνες 5 cm και 12 cm είναι γεμάτες με νερό. Αν αδειάσουμε το περιεχόμενό τους σε μία τρίτη σφαίρα με ακτίνα 13 cm, τότε:
Α: Η τρίτη σφαίρα θα γεμίσει πλήρως.
Β: Η τρίτη σφαίρα θα ξεχειλίσει.
Γ: Η τρίτη σφαίρα δε θα γεμίσει.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

7. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε ο όγκος της:
Α: Διπλασιάζεται Β: Τριπλασιάζεται Γ: Τετραπλασιάζεται Δ: Οκταπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

8. Ένα τμήμα ΑΒ έχει μήκος 6 cm. Ένα σημείο Σ απέχει 4 cm από το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Τότε:
Α: Το Σ ανήκει στη σφαίρα διαμέτρου ΑΒ.
Β: Το Σ ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας διαμέτρου ΑΒ.
Γ: Το Σ βρίσκεται εξωτερικά της σφαίρας διαμέτρου ΑΒ.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας ρ και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με την ίδια ακτίνα έχουν λόγο:
Α: 1 Β: $\frac{1}{2}$ Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: 4
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

10. Όταν μία σφαίρα ακτίνας ρ «εγγράφεται» σε κύλινδρο, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι:
Α: διπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
Β: τριπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
Γ: τετραπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
Δ: ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

Α.

Ακτίνα σφαίρας (cm)	1	2		
Εμβαδόν επιφάνειας (cm^2)			400 π	
Όγκος (cm^3)				288 π

Β.

ρ: ακτίνα σφαίρας	1m	10cm	3,2dm	8dm	
Ε: εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας					
V: όγκος σφαίρας					36π m^3

2 Η διάμετρος μιας σφαίρας είναι δ = 4 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας.

3 Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας, καθώς και τον όγκο ημισφαιρίου ακτίνας $R = 4$ m.

4 Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, ώστε το εμβαδόν της επιφάνειάς της να πολλαπλασιαστεί επί 4; επί 36; επί 100;

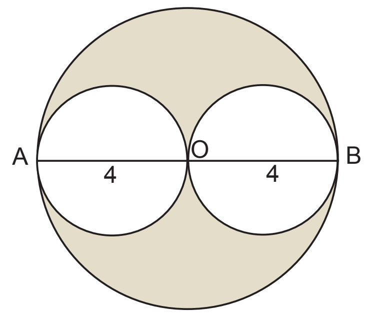
5 Να βρείτε την ποσότητα του χρώματος που χρειάζεται, για να βαφεί σφαιρική δεξαμενή ακτίνας $\rho = 10$ m, αν το ένα κιλό χρώματος βάφει επιφάνεια 8 m^2.

6 Τέσσερις κίτρινες μπάλες έχουν ακτίνα 5 cm και πέντε κόκκινες μπάλες έχουν ακτίνα 4 cm. Ποιου χρώματος μπάλες έχουν τη μεγαλύτερη συνολική επιφάνεια και ποιου χρώματος μπάλες έχουν το μεγαλύτερο συνολικό όγκο;

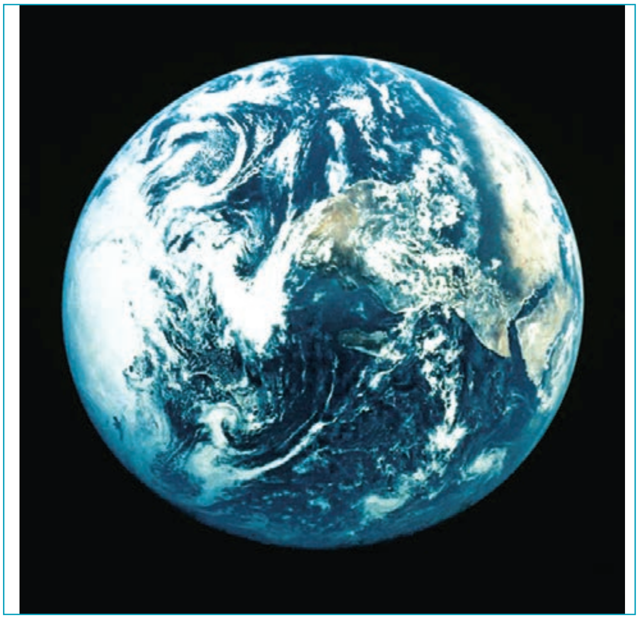
7 Σε κιβώτιο που έχει σχήμα κύβου χωράει ακριβώς μια σφαίρα με ακτίνα 40 cm. Να βρείτε τον όγκο του μέρους του κιβωτίου που μένει άδειο.

8 Δύο σφαίρες έχουν διαμέτρους 30 cm και 40 cm. Να υπολογίσετε τη διάμετρο μιας τρίτης σφαίρας, της οποίας το εμβαδόν της επιφάνειάς της είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών των δύο σφαιρών.

9 Στο παρακάτω σχήμα οι δύο μικρές σφαίρες έχουν διαμέτρους ΑΟ=ΟΒ= 4cm, και περιέχονται στη μεγάλη σφαίρα κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ΟΑ = ΟΒ.
Να βρείτε τον όγκο του γραμμοσκιασμένου στερεού.

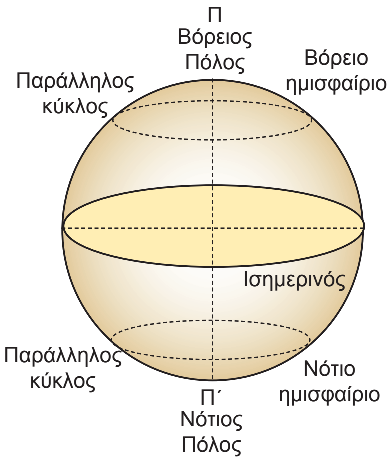


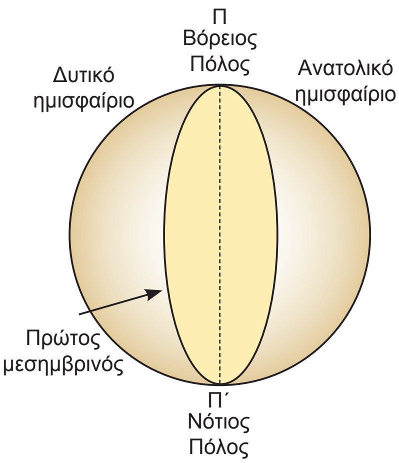
4.7. Γεωγραφικές συντεταγμένες



Το σχήμα της Γης είναι ελλειψοειδές. Για πρακτικούς λόγους, όμως, θεωρούμε ότι η Γη είναι σφαίρα και την ονομάζουμε **γήινη σφαίρα** ή **υδρόγειο σφαίρα**.

Η υδρόγειος σφαίρα περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της, γύρω από έναν νοητό άξονα, ο οποίος περνά από τους δύο πόλους.
Ο νοητός αυτός άξονας ονομάζεται **άξονας περιστροφής της Γης**. Ο μέγιστος κύκλος της γήινης σφαίρας, ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα περιστροφής, ονομάζεται **ισημερινός**.

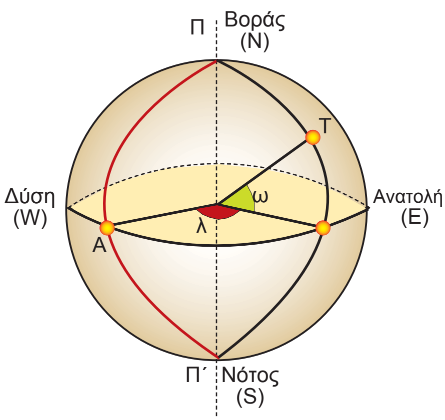




Ο ισημερινός χωρίζει τη Γη σε **δύο ημισφαίρια**, το **βόρειο** (συμβολίζεται με το γράμμα Ν από την αγγλική λέξη North που σημαίνει Βορράς) και το **νότιο** (συμβολίζεται με το γράμμα S από την αγγλική λέξη South που σημαίνει Νότος).

Η τομή κάθε επιπέδου, το οποίο είναι παράλληλο προς το επίπεδο του ισημερινού με την επιφάνεια της γήινης σφαίρας, είναι κύκλος με κέντρο πάνω στον άξονα περιστροφής.
Έτσι, το βόρειο και το νότιο ημισφαίριο χωρίζονται από παράλληλους προς τον ισημερινό κύκλους, με αποτέλεσμα από κάθε τόπο πάνω στην επιφάνεια της Γης να περνά ένας παράλληλος κύκλος, ο οποίος ονομάζεται **παράλληλος του τόπου**.

Το ημικύκλιο με διάμετρο ΠΠ΄, το οποίο περνά από το αστεροσκοπείο Γκρήνουιτς της Μ. Βρεττανίας, ονομάζεται **πρώτος μεσημβρινός**. Ο πρώτος μεσημβρινός χωρίζει τη γήινη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια, το **ανατολικό** (συμβολίζεται με το γράμμα Ε από την αγγλική λέξη East που σημαίνει ανατολή) και το **δυτικό** (συμβολίζεται με το γράμμα W από την αγγλική λέξη West που σημαίνει δύση).



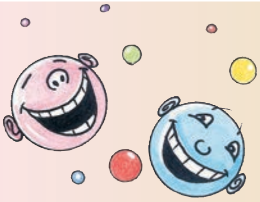
Από κάθε τόπο περνά ένα ημικύκλιο με διάμετρο ΠΠ΄. Το ημικύκλιο ονομάζεται **μεσημβρινός του τόπου**.

Κάθε τόπος χαρακτηρίζεται από δύο διαφορετικές επίκεντρες γωνίες. Στο διπλανό σχήμα, αν Α είναι το σημείο τομής του ισημερινού με τον πρώτο μεσημβρινό, ο τόπος Τ χαρακτηρίζεται από την επίκεντρη γωνία λ και την επίκεντρη γωνία ω.
Η επίκεντρη γωνία λ ονομάζεται **γεωγραφικό μήκος** του τόπου και η ω **γεωγραφικό πλάτος** του τόπου.

Ανάλογα με τη θέση του τόπου, το **γεωγραφικό μήκος** χαρακτηρίζεται ως **δυτικό** (W) ή ως **ανατολικό** (Ε) (αν ο τόπος βρίσκεται στο ανατολικό ή στο δυτικό ημισφαίριο αντίστοιχα).
Επίσης, το **γεωγραφικό πλάτος** χαρακτηρίζεται ως **βόρειο** (Ν) ή **νότιο** (S), αν ο τόπος βρίσκεται στο βόρειο ή στο νότιο ημισφαίριο αντίστοιχα.

Έτσι, οι συντεταγμένες μερικών σπουδαίων πόλεων είναι:

	N	E	S	W
ΑΘΗΝΑ	37,27°	23,45°		
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	40,15°	22,30°		
ΡΩΜΗ	40,04°	12,30°		
ΠΑΡΙΣΙ	48,23°	3,08°		
ΛΟΝΔΙΝΟ	51,29°	0,38°		
ΣΙΝΔΕΥ		151,15°	34,07°	
ΡΙΟ ΝΤΕ ΤΖΑΝΕΙΡΟ			23,38°	43,08°
ΝΕΑ ΥΟΡΚΗ	43,10°			73,45°



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

- Σε ποιο μέρος της Γης ένας άνθρωπος θα κοίταζε νότια προς όλες τις κατευθύνσεις;

- Σχεδιάστε ένα σφαιρικό τρίγωνο που να έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

- Ένας ταξιδιώτης περπατώντας διέσχισε μια διαδρομή και ξαναγύρισε στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής το κεφάλι του διένυσε 12,56 μέτρα περισσότερα από τα πόδια του. Πώς είναι δυνατόν;

- Μια αρκούδα βγήκε από τη σπηλιά της, προχώρησε 1 km νότια, στη συνέχεια 1 km ανατολικά και τέλος 1 km βόρεια και ξαναβρέθηκε στη σπηλιά της! Τι χρώμα έχει η αρκούδα;

Επανάληψη Κεφαλαίου 4

Στερεομετρία

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:
- να είναι παράλληλα,
- να τέμνονται κατά μία ευθεία.

Σχετικές θέσεις ευθειών στον χώρο

Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες ε και ζ, τότε οι μόνες δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν είναι:
- Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
- Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:
- Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.
- Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.
- Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.

Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: **E_Π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος)**
Ολικό εμβαδόν: **$E_{ολ} = E_\Pi + 2E_β$**

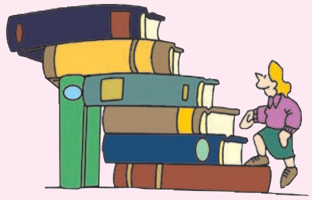
Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: **$E_\Pi = 2πρ \cdot υ$**
Ολικό εμβαδόν: **$E_{ολ} = E_\Pi + 2E_β$**

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Όγκος πρίσματος: **V = (εμβαδόν βάσης) · (ύψος)**

Όγκος κυλίνδρου: **$V = πρ^2υ$**



Πυραμίδα

Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου.

Εμβαδόν κανονικής πυραμίδας: $E_\Pi = \frac{1}{2}(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$

$E_{\text{ολ}} = E_\pi + E_\beta$

Όγκος πυραμίδας: $V = \frac{1}{3}(\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$

Κώνος

Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.

Εμβαδόν επιφάνειας κώνου: $E_\Pi = \pi\rho\lambda$

$E_{\text{ολ}} = E_\Pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2$

Όγκος κώνου: $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 υ$

Σφαίρα

Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του.

Εμβαδόν σφαίρας: $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2$

Όγκος σφαίρας: $V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi\rho^3$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α′

Κεφάλαιο 1
Εξισώσεις – Ανισώσεις

1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** → iii, **β)** → iv, **γ)** → i, **δ)** → ii

2 **α)** Γ, **β)** Α, **γ)** Β, **δ)** Γ

3 **α)** → iv, **β)** → i, **γ)** → iii, **δ)** → ii

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 3x+12, **β)** (x+y)·9 **γ)** 2x+2(x–2)

2 **α)** 5x, **β)** $x+\frac{19}{100}x$

3 **α)** 17x, **β)** –16α, **γ)** 27y, **δ)** 4ω, **ε)** –2x+1, **στ)** –2β

4 **α)** 5x–y, **β)** 7ω+5α, **γ)** –2x–2y, **δ)** –7x+4ω

5 **α)** Α=–9, **β)** Β=–36

6 **α)** Α=0,1, **β)** Β=1

7 **α)** BMI: 28,4 -1ος βαθμός παχυσαρκίας για άνδρες
β) BMI: 31,7 - 2ος βαθμός παχυσαρκίας για γυναίκες

1.2 Εξισώσεις α′ βαθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** 30, **β)** 7, **γ)** 24, **δ)** –3, **ε)** –9, **στ)** 7

2 **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

3 **α)** → iii, **β)** → iv, **γ)** → i, **δ)** → ii

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Κάνοντας την επαλήθευση βρίσκουμε ότι: **α)** δεν είναι λύση, **β)** δεν είναι λύση, **γ)** είναι λύση.

2 **α)** x=–22, **β)** y=1, **γ)** t=–2

3 **α)** x=4, **β)** $y=\frac{11}{4}$, **γ)** $\omega=-\frac{1}{2}$

4 **α)** x=–11, **β)** $x=\frac{30}{13}$, **γ)** $x=\frac{9}{7}$

5 **α)** x=–61, **β)** y=4, **γ)** $\omega=\frac{11}{4}$

6 **α)** $x=\frac{9}{8}$, **β)** t=–26

7 **α)** $x=-\frac{1}{6}$, **β)** $t=\frac{12}{17}$

8 **α)** $x=\frac{15}{7}$, **β)** x=3,9

9 **α)** Για μ=2 λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο το x, **β)** για x=7 λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο το μ, **γ)** αδύνατη

10 **α)** x=2 με πλευρές 7, 7, 5 **β)** x=4 με πλευρές 11, 9, 9, **γ)** η εξίσωση 2x+3=2x+1 είναι αδύνατη

11 x=4, y=3, ω=65°

1.3 Επίλυση τύπων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ 2 Β 3 Γ 4 Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 $\rho=\frac{L}{2\pi}$

2 $y=\frac{P-2x}{2}$

3 $\rho=\frac{E}{2\pi\upsilon}$

4 $y=\frac{-\alpha x-\gamma}{\beta}$

5 $\omega=\frac{E-2xy}{2x+2y}$

6 $t=\frac{s}{\upsilon}$

7 $\beta=\frac{2E-B\upsilon}{\upsilon}$

8 $\lambda=\frac{s-\alpha}{s}$

9 $h=\frac{P-P_0}{\varepsilon}$

10 $c=\frac{Q}{m\cdot\theta}$

11 $q_1=\frac{F\cdot r^2}{k_c\cdot q_2}$

12 $\upsilon_0=\frac{2S-gt^2}{2t}$

13 **α)** $\theta=\frac{273{,}15\,(V-V_0)}{V_0}$, **β)** θ=54,63°C

14 **α)** D=11 ημέρες **β)** για D=180, h=1090,3 m, **γ)** για D=360, h=2.251,6 m

1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Δ 2 Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Αν x είναι το μέτρο της μιας οξείας γωνίας και 2x το μέτρο της δεύτερης, τότε x=30° και 2x=60°.

2 x=14 m.

3 x=10 έτη.

4 Το αρχικό ποσό είναι 1200€. Ο πρώτος φίλος πήρε 300€, ο δεύτερος φίλος πήρε 400€, ο τρίτος φίλος πήρε 500€.

5 Το πρώτο αυτοκίνητο περιέχει 54 λίτρα και το δεύτερο περιέχει 27 λίτρα.

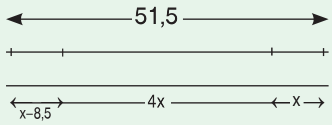
6 Είναι 7 τα λεωφορεία των 8 ατόμων και 5 των 14 ατόμων

7 Πρέπει να αυξηθεί κατά 4 m.

8 Το ωρομίσθιο του Πέτρου είναι 8€ και του Σάκη 6€.

9 Τα στιλό είναι 6.

10 **α)**



β) ο αγώνας δρόμου είναι 10 km, της κολύμβησης 1,5 km και της ποδηλασίας 40 km.

1.5 Ανισώσεις α′ βαθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** $x+3<6$, **β)** $\frac{x}{2}<-\frac{3}{2}$, **γ)** $x-3>2$, **δ)** $\frac{x}{-3}\geq -2$, **ε)** $2x\geq -4$,

στ) $\frac{3x}{2}<6$, **ζ)** $-3x>-21$, **η)** $-4x\geq 2$

2 **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ, **στ)** Λ, **ζ)** Σ, **η)** Λ, **θ)** Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $x\leq 4$, **β)** $x>-5$, **γ)** $x<0$, **δ)** $x\geq -\frac{1}{6}$.

2 **α)** $\omega>\frac{1}{2}$, **β)** $x\geq 0$, **γ)** $0\cdot y<8$, **δ)** $t<-8$

3 **α)** $x>\frac{32}{13}$, **β)** $0\cdot x>-1$, **γ)** $x>-\frac{22}{7}$, **δ)** $x>11$, **ε)** $\omega<-3$,

στ) $0\cdot t>-11$

4 **α)** $-1<x<5$, **β)** $x>6$, **γ)** δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, **δ)** $y>14{,}2$, **ε)** $-1<x\leq 3$, **στ)** $x>9$

5 **α)** $-4<x\leq 9$, **β)** $-1<x<1$, **γ)** $\frac{2}{5}\leq x\leq \frac{7}{5}$

6 $\mu<5$

7 $\alpha<\frac{5}{4}$

8 Αν x € είναι τα χρήματα της Μαρίας, τότε (3x–14)€ είναι τα χρήματα της Άννας μετά τη δαπάνη.

9 Πρέπει να γράψει $16<x\leq 20$.

10 Για χρόνο ομιλίας $x>150$ λεπτά.

11 $37{,}5<x<40$.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Α, **β)** Α, **γ)** Β **2** Γ

3 $9\to 3,\quad 16\to 4,\quad 4\to 2,\quad 25\to 5,\quad 36\to 6$

4 **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ, **στ)** Λ, **ζ)** Λ, **η)** Σ, **θ)** Λ, **ι)** Λ

5 **1)** Β, **2)** Β, **3)** Ε, **4)** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 9, 0,9, 90, **β)** 2, 0,2, 20, 200, **γ)** 11, 1,1, 110, 0,11,

δ) $\frac{3}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{20}{7}$, $\frac{6}{11}$.

2 **α)** 6, **β)** 6, **γ)** 18, **δ)** 18

3 **α)** 9, **β)** 5, **γ)** 33, **δ)** 81, **ε)** 4,
στ) 4,4 ή 2,16 ή 1,25 ή 3,9 ή 5,1 ή 6,0

4 Υπολογίζουμε τις τετραγωνικές ρίζες ξεκινώντας από τις απλούστερες.

5 $x=10$, $y=5$, $\beta=4$, $\alpha=29$, $\gamma=35$, $\omega=77$

6 **α)** $x=3$, **β)** $x=5$, **γ)** $x=8$, $x=\frac{10}{9}$

7 $\upsilon=3{,}5$

8 $\delta=97$

9 $x=2$

10 $\alpha=5$, $\beta=12$, $\gamma=15$, $x=8$

11 **α)** $\sqrt{\alpha}<\alpha<\alpha^2$, **β)** $\sqrt{\alpha}>\alpha>\alpha^2$

12

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4	3	2	6	6
36	49	6	7	42	42

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

13

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
25	36	5	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

Παρατηρούμε ότι: $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

14

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16	3	4	7	5
64	36	8	6	14	10

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$.

2.2 Άρρητοι αριθμοί Πραγματικοί αριθμοί

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ, **στ)** Σ

2 **α)** Δ, **β)** Ε, **γ)** Γ, **δ)** Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** άρρητος, ρητός, **β)** ρητός, άρρητος, **γ)** άρρητος, ρητός, ρητός

2 **α)** $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{5}<\sqrt{7}$, **β)** $\sqrt{2}<2<\sqrt{5}<\sqrt{7}$, **γ)** $\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$, **δ)** $\sqrt{2}<\sqrt{1+\sqrt{2}}$

3 **α)** 1,73, **β)** 2,23, **γ)** 2,64, **δ)** 2,82

4 **α)** $x=0$, **β)** $x=\pm\sqrt{5}$, **γ)** αδύνατη, **δ)** $x=\pm\sqrt{17}$

5 α=3,46 cm

6 **α)** α=8,48 cm, **β)** $E=72cm^2$

2.3 Προβλήματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 $E=400\ cm^2$ **2** $E=151{,}38\ cm^2$

3 Βρίσκουμε ότι $ΚΛ=\sqrt{5}$, $ΛΜ=\sqrt{10}$, $ΚΜ=\sqrt{5}$, οπότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο.

4 ΒΕ=7,94 cm

5 Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε την τρίτη πλευρά ως υποτείνουσα (α' περίπτωση: $x=\sqrt{164}=$ $=12{,}81$) ή ως κάθετη πλευρά (β' περίπτωση: $x=6$).

6 **α)** i) υποτείνουσα ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές 1 cm,
ii) υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 1 cm και 2 cm,
iii) υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 2 cm και 3 cm.
β) Χρησιμοποιούμε τα τμήματα του ερωτήματος (α).

7 2,5196 m **8** 5 βέλη

9 Ο οδηγός μπορεί να κάνει αναστροφή.

Κεφάλαιο 3
Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 β **2** γ **3** γ **4** β **5** **(α)** → ii), **(β)** → i), **(γ)** → iii)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)**

x	–3	–2	–1	0	2
y	–11	–8	–5	–2	4

β)

x	–1	0	2	4	5
y	–1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

2 **α)**

x	–3	–1	0	2	5
y	10	2	1	5	26

β)

x	–3	–2	0	1	3
y	–2	–4	–2	2	16

3 y=1,08x

4 y=600+0,07x

5 **α)** y=30–x, **β)** $y=\frac{100}{x}$

6 $E=x^2$ και Π=4x. Επομένως:

x	1	2	2,5	5	0,3
Ε	1	4	6,25	25	0,09
Π	4	8	10	20	1,2

7

x	2	4	–3	1
y	1	7	–14	–2

8 **α)** Σε 2 ώρες θα έχει διανύσει 140 χιλιόμετρα, ενώ σε 5 ημέρες θα έχει διανύσει 8400 χιλιόμετρα, **β)** s=70t.

3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Α(2, 3), Β(–2, 3), Γ(–2, –3), Δ(2, –3)

2

Σημείο Α	Συμ/κό ως προς x'x	Συμ/κό ως προς y'y	Συμ/κό ως προς Ο
(–2, 3)	(–2, –3)	(2, 3)	(2, –3)
(3, 5)	(3, –5)	(–3, 5)	(–3, –5)
(–3, 5)	(–3, –5)	(3, 5)	(3, –5)
(–3, –5)	(–3, 5)	(3, –5)	(3, 5)
(3, –5)	(3, 5)	(–3, –5)	(–3, 5)

3 α) **4** **α)** Β, **β)** Δ, **γ)** Β, **δ)** Γ

5 **α)** Γ, **β)** Δ, **γ)** Δ, **δ)** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Α(2, 3), Β(4, 0), Γ(–3, 3), Δ(0, –4), Ε(–4, –2), Ζ(5, –3), Η(–2, 1), Θ(–5, 0), Ι(0, 5)

3 Ως προς x'x: $A_1(-3, -4)$, $B_1\left(2, \frac{7}{2}\right)$.

Ως προς y'y: $A_2(3, 4)$, $B_2\left(-2, -\frac{7}{2}\right)$.

Ως προς Ο: $A_3(3, -4)$, $B_3\left(-2, \frac{7}{2}\right)$.

4 **α)** Α(1, 3) Β(–2, –1) Γ(–2, 3), **β)** i) Α, ii) Β, **γ)** Αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα.

5 **α)** 5 και 3, **β)** 2 και 3, **γ)** 4 και 0

6 **α)** $\sqrt{20}$, **β)** $\sqrt{32}$, **γ)** 5, **δ)** 9

7 17 μίλια και 2h 7′ 30″

8 **β)** 64 cmHg, **γ)** 0,75 km **9** **β)** 19˚C, **γ)** 1,6 km

3.3 Η συνάρτηση $y = \alpha x$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)**

x	2	4	6
y	5	10	15

β) Γ

2 Η ευθεία του πρώτου σχήματος **3** (δ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)**

x	1	2	5	7	10
y	3	6	15	21	30

β) $y=3x$

2 Διέρχονται όλες από το Ο και από τα σημεία (1, 2), (1, 3), (1, 5) αντίστοιχα.

3 Διέρχονται και οι δύο από το Ο και από τα σημεία (2, 1), (2, –1) αντίστοιχα.

4 $s=5t$.

5 $y=3x$.

6 Διέρχεται από το Ο και το σημείο (2, 3).

7 $\alpha=-3$.

8 **α)** $y=1{,}2x$, **γ)** i) 8,4 €, ii) $x=5{,}83$ €.

9 **α)** $y=1{,}12x$, **β)** 280$, **γ)** 223 €.

3.4 Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ **2** $\varepsilon_1 \to y=2x+2$, $\varepsilon_2 \to y=2x$, $\varepsilon_3 \to y=2x-1$,

3 $AB \to y=2$, $A\Gamma \to x=-3$, $\Gamma\Delta \to y=-2$, $B\Delta \to x=3$

4 **α)** Β, **β)** Δ, **γ)** Β **5** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Η $y=\frac{1}{2}x$ διέρχεται από το Ο και το σημείο (2, 1). Με παράλληλη μετατόπιση προκύπτουν οι άλλες δύο ευθείες.

2 **α)** Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (1, –1) και (0, 2), **β)** ημιευθεία με αρχή το σημείο (0, 2), **γ)** ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (–2, 8) και (5, –13).

3 $y=2x-3$

4 **α)** Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ, **β)** επαλήθευση

5 $y=0{,}2x+0{,}5$.

6 (0, –2), (3, 0).

7 Διέρχεται από τα σημεία (1, 1) και (2, 0).

8 Α(–2, 2), Β(1, 2), Γ(1, 3), Δ(–2, 3), Ε=3τ.μ.

9 **α)** $y=200x+100$.

10 **α)** $\omega=20-x$, **β)** $y=150x$, $0 \leq x \leq 20$.

3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 α) και γ) **2** **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Σ

3 $\alpha \to y=\frac{3}{x}$, $\beta \to y=\frac{2}{x}$ $\gamma \to y=\frac{1}{x}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

4 **α)** $u=5277{,}78$ km/h, **β)** $u=\frac{380.000}{t}$

5 **α)**

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y	36	18	12	9	6	3	2	1

Τα x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα. **β)** $y=\frac{36}{x}$, $x>0$.

Κεφάλαιο 4

Περιγραφική Στατιστική

4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 γ) **2** δ) **3** β)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 72, **β)** 30, **γ)** 20, **δ)** 7, **ε)** 16, **στ)** 72

2 **α)** 12, **β)** 24, **γ)** 42, **δ)** 60, **ε)** 9, **στ)** 50

3 β) **4** α) **5** 15%

6 Για τον «Α» είναι 45%, για τον «Β» 35% και για τον «Γ» 20%

7 **α)** 60%, **β)** 30%

8 Πληθυσμός: το σύνολο των οπαδών. Δείγμα: τα 1000 άτομα που ρωτήθηκαν. Το δείγμα δεν είναι αξιόπιστο

9 Το δείγμα πρέπει να αποτελείται από ανθρώπους όλων των ηλικιών.

4.2 Γραφικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1.Γ, 2.Β, 3.Β, 4.Δ, 5.Γ, 6.Β, **2** 1.Α, 2.Β, 3.Β, 4.Γ, 5.Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 2000 : 80.000, 2001 : 110.000, 2002 : 160.000, 2003 : 130.000. Συνολικά: 480.000, **β)** 33,33%

2 **α)** 300 μαθητές, **β)** 24% **3** **β)** Α:40, Β:120, Γ:160, Δ:80

4 **α)** 3 μαθητές, 5% **5** **α)** 105°

6 **β)** Τουλάχιστον 90′ μελετά το 80% των αγοριών και το 84% των κοριτσιών. Το πολύ 120′ μελετά το 83% των αγοριών και το 76% των κοριτσιών.

4.3 Κατανομές συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Γ, 2Α, 3Β, 4Δ, 5Α

2

Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
40	20
10	5
30	15
20	10
70	35
30	15
Σύνολο: 200	100

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

Αριθμός παιδιών

Συχνότητα	Σχετική συχνότ.
4	10%
10	25%
14	35%
8	20%
4	10%
Σύνολο 40	100%

Αριθμός απουσιών

Συχνότητα	Σχετική συχνότ.
3	7,5%
8	20%
12	30%
6	15%
6	15%
4	10%
1	2,5%
Σύνολο 40	100%

2 α)

Έτος	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
2000	400	20
2001	250	12,5
2002	450	22,5
2003	500	25
2004	400	20
Σύνολο	2.000	100

β) Αύξηση: 2002, 2003. Μείωση: 2001, 2004

3 α)

Αριθμός προϊόντων	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
0	3	30
1	4	40
2	3	30
Σύνολο	10	100

4 α)

Αποτελέσματα	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
Η	8	23,53
Ι	18	52,94
Ν	8	23,53
Σύνολο	34	100

5 α)

Αριθμός μηνυμάτων	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
0	1	3,23
1	2	6,45
2	8	25,81
3	5	16,13
4	5	16,13
5	6	19,35
6	2	6,45
7	2	6,45
Σύνολο	31	100

β) 15 ημέρες, γ) 51,61 %

6 α)

Ομάδα αίματος	Συχνότητες	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
Ο	5	20
Α	11	44
Β	6	24
ΑΒ	3	12
Σύνολο	25	100

β) 68 %, γ) Η ΑΒ με συχνότητα 12%

7 α)

Σωστές απαντήσεις	Σχετικές συχνότ. (επί τοις %)
0	8,3
1	25
2	41,7
3	16,7
4	8,3
Σύνολο	100

β) 75 %

8 α) 20.000 υπολογιστές

β)

Μάρκα Η/Υ	Συχνότητες
Α	4000
Β	7000
Γ	4000
Δ	5000
Σύνολο	20000

γ) 45 %

4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Β, 2Γ, 3Δ

2

Κλάσεις	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20
Συχνότητες	1	4	5	6	14
Σχετ. συχνότητες	0,05	0,2	0,25	0,3	0,2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** Η συχνότητα που λείπει είναι 24

2 **α)**

Κλάσεις	Συχνότητες
0 – 2	8
2 – 4	15
4 – 6	15
6 – 8	8
8 – 10	4
Σύνολο	50

3 **α)**

Κλάσεις	Συχνότητες
0 – 4	1
4 – 8	5
8 – 12	4
12 – 16	11
16 – 20	9
Σύνολο	30

4 **α)**

Κλάσεις	Συχνότητες
200 – 220	8
220 – 240	4
240 – 260	7
260 – 280	7
280 – 300	4
Σύνολο	30

5 Οι συχνότητες για την κάθε κλάση είναι 28, 32, 12, 8 αντίστοιχα.

4.5 Μέση τιμή - Διάμεσος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Δ **2** Γ **3** Β **4** **α)** Α, **β)** Γ, **γ)** Δ

5 Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** 7, **β)** 5,5, **γ)** $-\frac{4}{7}$, **δ)** $\frac{127}{360}$

2 **α)** 1,5, **β)** 2, **γ)** 101, **δ)** –1

3 **α)** 17,9, 18,6, **β)** Ο μαθητής Β, **γ)** 18, 19

4 **α)** 199,9, **β)** 200, **γ)** 200,58

5 **α)**

Θερμοκρασία	Συχνότητες	Σχετ. Συχνότητες %
10	5	16,67
12	5	16,67
14	9	30
16	6	20
17	2	6,66
18	3	10
Σύνολο	30	100

β) 14, 14

6 **α)**

Ηλικία παιδιών	Συχνότητες	Σχετ. Συχνότητες %
0 – 2	50	25
2 – 4	40	20
4 – 6	60	30
6 – 8	30	15
8 – 10	10	5
10 – 12	10	5
Σύνολο	200	100

β) 4,4

7 24,72

8 **α)** i)

Τιμές	Συχνότητες
45	1
46	1
47	2
48	1
49	4
50	3
51	2
52	3
53	1
54	2
Σύνολο	20

ii) Μ= 49,9

β) i)

Τιμές	Συχνότητες
45 – 47	2
47 – 49	3
49 – 51	7
51 – 53	5
53 – 55	3
Σύνολο	20

ii) Μ′= 50,4.

iii) Η τιμή Μ.

ΜΕΡΟΣ Β′

Κεφάλαιο 1

Εμβαδά επίπεδων σχημάτων Πυθαγόρειο θεώρημα

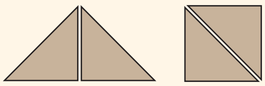
1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

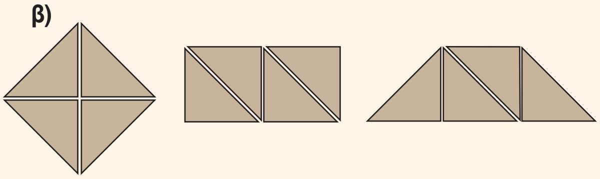
1 Το σχήμα Α.

2 Και τα τρία έχουν εμβαδόν 39.

3 α)



β)



1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Γ 2Δ 3Δ 4Α 5Β 6Α

2 1Α 2Β 3Γ 4Β 5Γ 6Α 7Β 8Α 9Β 10Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 32 cm²=0,0032 m² | 312 cm²=0,0312 m²
127km²=127.000.000 m² | 710 dm²=7,1 m²
12720 mm²=0,01272 m² | 212 dm²=2,12 m²
1280 mm²=0,00128 m² | 79 km²=79.000.000 m²

2 12 m²=120.000 cm² | 175 dm²=17.500 cm²
456 m²=4.560.000 cm² | 136 m²=1.360.000 cm²
3 km²=30.000.000.000 cm² | 1750 mm²=17,5 cm²
256 km²=2.560.000.000.000 cm²

3 12 km²=12.000.000.000.000 mm²
431 m²=431.000.000 mm²
17 dm²=170.000 mm²
236 cm²=23.600 mm²

4 7233 mm²=0,000000007233 km²
4321 cm²=0,0000004321 km²
6322 dm²=0,00006322 km²
14632 mm²=0,000000014632 km²
560 m²=0,00056 km²

5 α) 13850 mm²=0,013850 m²
670 cm²=0,067 m²
13,7 dm²=0,137 m²
13850 mm²<670 cm²<13,7 dm²<0,23 m²<0,48 m²
β) 32 dm²=0,32 m²
23270 mm²=0,02327 m²
1356 cm²=0,1356 m²
23270 mm²<1356 cm²<32 dm²<1,23 m²

6 α) m², β) km², γ) στρέμμα, δ) cm², ε) cm²

1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 1Γ, 2Γ, 3Β, 4Α, 5Γ, 6Β, 7Α, 8Β

2 1Γ, 2Γ, 3Α, 4Α, 5Α, 6Γ, 7Β, 8Α, 9Γ, 10Α, 11Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 $E=225$ cm²

2 $E=12.600$ cm²

3 Υπολογίζουμε το εμβαδόν του ροζ σχήματος και το εμβαδόν του κίτρινου σχήματος, τα οποία είναι ίσα με 48□.

4 α) Παρατηρούμε τις διαστάσεις του τριγώνου ΑΕΔ.
β) Συγκρίνουμε τα εμβαδά των τριγώνων με το εμβαδόν του τετραγώνου.

5 Είναι $E_1=E_2=x^2+3x$.

6 $E=64$ cm²

7 Το κόστος θα είναι 11.477,76 €.

8 Συγκρίνουμε τις διαστάσεις των τριγώνων με τις διαστάσεις των ορθογωνίων.

9 α) Οι πλευρές των τριγώνων είναι 18 m και (30–x) m,
β) $x=6$ m.

10 α) Συγκρίνουμε τα εμβαδά των τριγώνων με το εμβαδόν του τετραγώνου.
β) Συγκρίνουμε τα (ΜΔΒ), (ΔΝΒ) με τα (ΜΑΒ), (ΝΓΒ) αντίστοιχα.

11 $E_1=15$ cm² | $E_2=12$ cm² | $E_3=7,5$ cm²
$E_4=16$ cm² | $E_5=16$ cm² | $E_6=15$ cm²
$E_7=9$ cm² | $E_8=16$ cm² | $E_9=18,5$ cm²
$E_{10}=10$ cm² | $E_{11}=11$ cm² | $E_{12}=22$ cm²

12 (ΑΒΓΔ)=22,5 cm²

13 $x=10$ cm, $x=6$ cm, $x=10$ cm, $x=6$ cm.

14 $E=60$ cm², $E=34$ cm², $E=32$ cm², $E=24$ cm², $E=81$ cm², $E=12,5$ cm².

15 $E=169$ τ.μ.

16 **α)** $E_{σαλ}=34\ m^2$ $E_{κουζ}=12\ m^2$ $E_{γραφ}=9\ m^2$
$E_{wc}=4{,}5\ m^2$ $E_{υπν1}=12\ m^2$ $E_{μπαν}=7{,}5\ m^2$
$E_{υπν2}=11{,}25\ m^2$
β) $E_{διαδ}=11{,}25\ m^2$, **γ)** $E_{βερ}=53{,}75\ m^2$

17 **α)** 56800 €, **β)** 1136 κλήματα

1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ **2** Β **3** Γ **4** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 $E_1=16\ m^2$, $E_2=6{,}76\ m^2$, $E_3=0{,}36\ m^2$.

2 Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

3 **α)** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα για την τριάδα 6 cm, 8 cm, 10 cm.
β) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα για τις τριάδες 12 cm, 16 cm, 20 cm και 3 cm, 4 cm, 5 cm.

4 $E=64\ dm^2$

5 $E=5{,}41\ m^2$

6 Αποδεικνύουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

7 $Π=40$ dm, $E=96\ dm^2$

8 $x=4$ m.

9 Οι τοποθεσίες Α, Δ.

Κεφάλαιο 2

Τριγωνομετρία - Διανύσματα

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Γ **2** **α)** Β, **β)** Δ

3 $θ \longrightarrow 1$, $φ \longrightarrow \frac{5}{2}$, $ω \longrightarrow \frac{3}{2}$, $y \longrightarrow \frac{5}{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $x = 6{,}92$ **β)** $x = 11{,}9$
γ) $x = 16{,}64$ **δ)** $x = 10$

2 Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2.

3 Έχουμε ότι: ΑΓ = 6,93 cm, ΒΓ = 8 m, $\hat{B} = 60^\circ$, εμβαδόν $E = 13{,}86\ cm^2$ και $υ = 3{,}46$ cm (το ύψος από το Α).

4 Η απόσταση είναι 34,93 m.

5 $h = 10{,}74$ m.

6 Ο χαρταετός βρίσκεται σε ύψος περίπου 103 m.

7 **α)** ΒΔ = (90–x) cm, **β)** $εφθ = \frac{25}{90-x}$, **γ)** $εφθ = \frac{35}{x}$.
δ) Τα κλάσματα των ερωτημάτων (β) και (γ) είναι ίσα για $x = 52{,}5$ cm.

2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ **β)** Β **γ)** Δ **δ)** Γ

2 Β **3** Β **4** Α **5** β), δ) και στ)

6 **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ,
στ) Σ, **ζ)** Σ, **η)** Λ, **θ)** Σ

7 **α)** ΑΔΒ, $συν A\hat{Δ}B = \frac{ΑΔ}{ΔΒ}$ **β)** ΑΒΓ, $ημ A\hat{B}Γ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$
γ) ΑΕΓ, $συν A\hat{E}Γ = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $ημA = \frac{4}{5}$, $συνA = \frac{3}{5}$, $ημΓ = \frac{3}{5}$, $συνΓ = \frac{4}{5}$
β) ημΑ = 0,94, συνΑ = 0,35, ημΓ = 0,35, συνΓ = 0,94
γ) ημΒ = 0,79, συνΒ = 0,61, ημΓ = 0,61, συνΓ = 0,79

2 $ημω = \frac{4}{5}$.

3 Χρησιμοποιούμε τις ανισότητες $ημω < 1$ και $συνω < 1$.

4 ΟΔ = 15 m, ΑΓ = 6 m, ΒΔ = 9 m.

2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ **β)** Γ

2 **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $x = 7{,}04$ cm **β)** $x = 2{,}67$ cm **γ)** $x = 4{,}2$ cm

2 **α)** $x = 11{,}01$ cm **β)** $x = 5{,}74$ cm **γ)** $x = 4{,}77$ cm
δ) $x = 4{,}93$ cm **ε)** $x = 5{,}96$ cm.

3 Τα μήκη των συρματόσχοινων που αντιστοιχούν στις γωνίες 55° και 70° είναι 9,77 m και 8,51 m αντίστοιχα.

4 ΑΓ = 10 m, ΑΒ = 9,74 m

5 **α)** $ημ56^\circ > ημ37^\circ > ημ20^\circ > ημ16^\circ$
β) $συν20^\circ > συν25^\circ > συν28^\circ > συν36^\circ$
γ) $εφ89^\circ > εφ51^\circ > εφ22^\circ > εφ18^\circ$

6 ΑΒ = 1,55 m, ΓΔ = 1,2 m

7 ΑΗ = 19,56 m, ΑΜ = 36,9 m

8 $ΓΣ = \frac{6371}{συν89{,}05^\circ}$

2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45°, και 60°

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** →i), **β)** →iii), **γ)** →i), **δ)** →v), **ε)** →iii), **στ)** →v)

2 Β

3 **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Σ, **ε)** Σ **4** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $\alpha = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm $\beta = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

α) $\beta = 7$ cm $\alpha = 7\sqrt{2}$ cm

2 **α)** Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα αποδεικνύουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β.

β) $\eta\mu A = \frac{5}{13}$ $\sigma\upsilon\nu A = \frac{12}{13}$

3 Εκτελούμε τις πράξεις μετά από αντικατάσταση των τριγωνομετρικών αριθμών.

4 **α)** $A = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ **β)** $A = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **γ)** $A = 1$

5 ΠΒ = 2598 m

6 $AB = 4\sqrt{2}$ m, $A\Delta = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ m

7 $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{3}$ m

8 **α)** $\theta = 30^\circ$ **β)** $AE = 4\sqrt{3}$ cm **γ)** ΕΔ = 9,1 cm

9 $\Pi = 18 + 4\sqrt{3}$

10 $\Gamma\Delta = 7 + 2\sqrt{3}$

11 Πρώτο θα φθάσει το σπουργίτι από το Β.

12 15,99 m

2.5 Η έννοια του διανύσματος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

2 **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

3 **α)** $\vec{AB} = \vec{E\Delta} = \vec{O\Gamma} = \vec{ZO}$

β) $\vec{AZ} = \vec{BO} = \vec{\Gamma\Delta} = \vec{OE}$

γ) $|\vec{B\Gamma}| = |\vec{EZ}| = |\vec{EO}| = |\vec{E\Delta}|$

4 δ), α)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Ίσα: $\vec{AB} = \vec{E\Delta}$, $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{AZ}$

Αντίθετα: $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{EZ}$

2 Ίσα: $\vec{\theta}$, $\vec{\zeta}$

Αντίθετα: $\vec{\lambda}$, $\vec{\varepsilon}$

3 Δεν είναι ίσα.

4 **α)** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\delta}|$, $|\vec{\gamma}| = |\vec{\varepsilon}| = |\vec{\zeta}|$ και $|\vec{i}| = |\vec{\kappa}|$

β) $\vec{\gamma}, \vec{\zeta}$, **γ)** $\vec{\iota}$, $\vec{\kappa}$

5 $|\vec{\alpha}| = \sqrt{10}$ cm, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ cm, $|\vec{\gamma}| = 4$ cm, $|\vec{\delta}| = 5$ cm

6 Παρατηρούμε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7 **α)** $(\vec{F_1}, \vec{F_3}, \vec{F_5})$ και $(\vec{F_2}, \vec{F_4}, \vec{B})$

β) $(\vec{F_3}, \vec{F_1})$, $(\vec{F_5}, \vec{F_1})$, $(\vec{F_4}, \vec{F_2})$, $(\vec{B}, \vec{F_2})$,

γ) $\vec{F_4}$, $\vec{F_2}$

δ) $\vec{F_3}$, $\vec{F_5}$

ε) ίσα μέτρα έχουν τα $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_4}$ καθώς και τα $\vec{F_3}, \vec{F_5}$.

2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ, **β)** Β, **γ)** Γ, **δ)** Β, **ε)** Α

2 **α)** $\vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{A\Delta}$, **β)** $\vec{B\Gamma} = \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}$,

γ) $\vec{\Gamma B} - \vec{\Gamma A} = \vec{AB}$, **δ)** $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}$

3 Β **4** **α)** Δ, **β)** Γ, **γ)** Α, **δ)** Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του πολυγώνου ή του παραλληλογράμμου.

2 **α)** $\vec{A\Delta}$, **β)** $\vec{0}$, **γ)** $\vec{\Delta\Gamma}$

3 **α)** $\vec{A\Gamma}$, **β)** $\vec{B\Delta}$, **γ)** $\vec{\Delta\Gamma}$

4 Είναι όλες οι διαφορές ίσες.

5 **α)** $\vec{A\Gamma}$, **β)** $\vec{EB}$, **γ)** $\vec{A\Gamma}$, **δ)** $\vec{A\Delta}$

8 Χρησιμοποιούμε την ισότητα $\vec{\Gamma M} = \vec{MB}$ αφού το Μ είναι μέσο του ΓΒ.

10 Χρησιμοποιούμε τις ισότητες $\vec{N\Gamma} = -\vec{N\Delta}$ και $\vec{AM} = -\vec{BM}$.

2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Β, **β)** Γ, **γ)** Α

2 Γ **3** Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

2 $|\vec{B_2}| = 135\sqrt{2}$ N **3** $|\vec{F}| = 15000\sqrt{3}$ N

4 $|\vec{B_1}| = |\vec{B_2}| = 100\sqrt{2}$ N **5** $|\vec{B_1}| = 400$N

Κεφάλαιο 3
Μέτρηση κύκλου

3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Εγγεγραμμένες: α, η   Επίκεντρες: γ, ε, θ

2 **α)** Β, **β)** Α

3 **α)** Α, **β)** Β, **γ)** Β, **δ)** Γ

4 Γ **5** **α)** Γ, **β)** Γ, **γ)** Β, **δ)** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $\varphi = 110^\circ$, $\omega = 250^\circ$ **β)** $\varphi = 30^\circ$, $\omega = 40^\circ$
γ) $\varphi = 30^\circ$, $\omega = 60^\circ$

2 $A\widehat{M}B = 135^\circ$ **3** $\overset{\frown}{MN} = 95^\circ$ **4** $\varphi = 30^\circ$

5 $\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$, $\overset{\frown}{\Delta B} = 45^\circ$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 135^\circ$, $\overset{\frown}{A\Gamma} = 45^\circ$

6 $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $B\Gamma = 3$ cm, $A\Gamma = 3\sqrt{3}$ cm, $\widehat{\Gamma} = 90^\circ$

7 $x = 65^\circ$, $y = 80^\circ$

8 $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 50^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$, $\widehat{\Delta} = 130^\circ$

9 $\varphi = 60^\circ$

3.2 Κανονικά πολύγωνα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ **β)** Β **γ)** Β **δ)** Β **ε)** Γ

2 **α)** Γ **β)** Α **γ)** Α

3 **α)** Β **β)** Β **γ)** Γ **δ)** Β **ε)** Β **στ)** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3	60°	120°
5	108°	72°
6	120°	60°
10	144°	36°

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15°	165°
30°	150°
72°	108°
20°	160°

2 $\nu = 10$ **3** $\omega = 60^\circ$, $\varphi = 120^\circ$ **4** $\nu = 12$

5 **α)** δεν υπάρχει, **β)** δεν υπάρχει.

6 Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2.

7 Το τετράγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία.

8 Αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες με ΚΛ, όπου ΚΛ = ΑΒ και υπολογίζουμε τις γωνίες.

3.3. Μήκος κύκλου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Ακτίνα ρ	5	6	4	3	2	9
Μήκος κύκλου L	31,4	37,68	25,12	18,84	12,56	56,52

2 Β

3 Οι λόγοι είναι: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{L_2}{L_3} = \frac{2}{3}$, $\frac{L_3}{L_1} = 3$.

$\frac{L_1}{2\rho} = \pi$, $\frac{L_2}{4\rho} = \pi$, $\frac{L_3}{6\rho} = \pi$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 Η διαφορά είναι $\frac{10}{\pi}$.

2 $\rho = 0{,}56$ m **3** **α)** 2,5 cm **β)** 5π

4 **α)** 2 προς 1 **β)** 2 προς 1 **5** 188,4 cm

6 4 στροφές **7** 318,47 στροφές **8** 6.369,43 km

3.4 Μήκος τόξου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 $90^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, $60^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{3}$, $180^\circ \longrightarrow \pi$

$270^\circ \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$, $45^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{4}$, $360^\circ \longrightarrow 2\pi$

2 Α

3

Τόξο σε μοίρες	30°	90°	135°	225°	100°	210°	60°	270°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

Τόξο σε μοίρες	60°	15°	120°	270°	180°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	π

2 $\ell = 4\pi$ **3** $\ell = 15{,}7$ cm **4** $\ell = 15{,}7$ cm

5 $\rho = 20$ cm

6 Είναι ίσα μόνο αν είναι τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων.

7 $\ell_{AB} = \frac{\pi}{4}$ cm, $\ell_{\Gamma\Delta} = \frac{3\pi}{8}$ cm, $\ell_{ZE} = \frac{\pi}{2}$ cm

3.5 Εμβαδόν κυκλικού τόξου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Β **2** Β **3** Δ

4

Ακτίνα ρ κύκλου	5 cm	3 cm	2,5 cm	$\sqrt{300}$
Εμβαδόν κύκλου Ε	78,5cm²	28,26cm²	19,625cm²	942cm²

5

Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν
1 cm	6,28 cm	3,14 cm²
2 cm	12,56 cm	12,56 cm²
3 cm	18,84 cm	28,26 cm²
4 cm	25,12 cm	50,24 cm²
ρ cm	6,28ρ cm	3,14ρ² cm²
2ρ cm	12,56ρ cm	12,56ρ² cm²
3ρ cm	18,84ρ cm	28,26ρ² cm²
4ρ cm	25,12ρ cm	50,24ρ² cm²

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 ρ = 10 cm **2** Ε = 15,7 cm²

3 L = 31,4 cm, Ε = 78,5 cm²

4 Κατασκευάζουμε κύκλο με ακτίνα ρ = 14,14 cm.

5 ρ = 1,69 cm **6** Ε = 0,1256 m² = 1256 cm²

7 Ε = 56,52 cm² **8** 12,56 cm.

3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

ακτίνα κύκλου	γωνία κυκλικού τομέα	εμβαδόν
ρ = 2 cm	μ = 60°	$E = \frac{2\pi}{3}$ cm²
ρ = 8 cm	μ = 45°	Ε = 8π cm²
ρ = 3 cm	μ = 120°	Ε = 3π cm²

2 ρ = 9 cm, Ε = 27π cm²

3 Α **4** Β **5** Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 μ = 45° **2** ρ = 1,95 m

3 Ε = 125,6 cm² **4** Ε = 508,68 cm²

5 Ε = 5,5 cm² **6** Ε = 4893 cm²

7 **α)** Ε = 38,88 cm² **β)** Ε = 38,88 cm²
γ) Ε = 50,24 cm² **δ)** Ε = 13,76 cm²
ε) Ε = 36,48 cm²

8 Ε=31,35 cm²

Κεφάλαιο 4

Γεωμετρικά στερεά Μέτρηση στερεών

4.1 Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Σ **2** Λ **3** Σ **4** Λ **5** Σ **6** Σ **7** Σ **8** Β **9** Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** ΑΒ, ΕΖ, ΑΔ, ΕΘ, **β)** ΔΓ, ΘΗ, ΕΖ, **γ)** ΕΑ, ΕΘ, ΖΒ, ΖΗ

2 **α)** Παράλληλο είναι το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες ΓΔ, ΔΖ, **β)** Τα επίπεδα που ορίζονται από τα ζεύγη (ΑΕ, ΕΔ), (ΕΗ, ΗΖ) και (ΘΗ, ΗΖ) τέμνουν το p στις ΑΕ, ΕΗ και ΘΗ αντίστοιχα.

4 ΑΒ = 10, **5** ΑΗ = 13 cm

6 **α)** Είναι κάθετες στα τεμνόμενα ζεύγη (ΔΓ, ΒΓ) και (ΔΒ, ΑΓ) στα σημεία τομής τους Γ, Κ αντίστοιχα.
β) ΚΓ = $6\sqrt{2}$ cm

7 39 m.

4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 **α)** Γ, **β)** Β, **γ)** Β, **2** **α)** Β, **β)** Β, **3** **α)** Γ, **β)** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

Περίμετρος βάσης	8	7	4	5	0,5
Ύψος υ	5	10	6	2,8	10
Εμβαδόν $E_π$	40	70	24	14	5

2 $E_π$ = 112 cm²

3

α	2	3	8	3	3
β	3	5	5	3	2
γ	4	4	7	4	4
υ	5	4	4	8	5
$E_π$	45	48	80	80	45

4 6 κιλά χρώμα, **5** $E_{ολ} = 240 + 8\sqrt{3}$ cm²

6 Χρειάστηκαν 16 m² ύφασμα.

7 **α)** $E_π$ = 94,2 cm² και $E_{ολ}$ = 150,72 cm²
β) $E_π$ = 75,36 cm² και $E_{ολ}$ = 100,48 cm²
γ) $E_π$ = 502,4 cm² και $E_{ολ}$ = 541,65 cm²
δ) $E_π$ = 502,4 cm² και $E_{ολ}$ = 602,88 cm²

8

ακτίνα βάσης (cm)	3	2	10	10	1
ύψος κυλίνδρου (cm)	5	4	1	2	9
εμβαδόν $E_π$ (cm²)	94,2	50,24	62,8	125,6	56,52
ολικό εμβαδόν (cm²)	150,72	75,36	690,8	753,6	62,8

9 9,61 €

4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Εμβαδόν βάσης (cm)	12	8	5
ύψος (cm)	3	7	6
όγκος (cm^3)	36	56	30

2

Εμβαδόν βάσης (cm)	22	9	20
ύψος (cm)	4	8	6
όγκος (cm^3)	88	72	120

3

ύψος κυλίνδρου	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm
εμβαδόν παράπλ. $E_π$	16π cm^2	32π cm^2	48π cm^2	64π cm^2
ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$	48π cm^2	64π cm^2	80π cm^2	96π cm^2
όγκος V	32π cm^3	64π cm^3	96π cm^3	128π cm^3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **α)** $E_π = 60\ cm^2$ **β)** $E_{ολ} = 72\ cm^2$ **γ)** $V = 30\ cm^3$

2 $V = 216\sqrt{3}\ cm^3$

3 Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο του $E_{ολ}$.

4 **α)** $E_β = 18\ cm^2$, περίμετρος = 22 cm
β) ΑΒ = 2 cm, ΓΔ = 10 cm

5 ρ = 4,62 cm, $V = 1407{,}45\ cm^3$

6 **α)** 120π cm^3 **β)** 20000 mm^3

7 28,26 mg πίσσας.

4.4. Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Λ **2** Σ **3** Σ **4** Λ **5** Λ **6** Σ **7** Γ **8** Β **9** Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

ύψος (cm)	8	12	6
πλευρά βάσης (cm)	12	8	10,58
απόστημα (cm)	10	12,65	8
εμβ. παρ.επιφ.(cm^2)	240	202,39	169,32
όγκος (cm^3)	384	256	336

2 $V = 480\ cm^3$

3 $E_π = 324\ cm^2$

4 **α)** $E_π = 144\ cm^2$ **β)** $E_{ολ} = 225\ cm^2$

5 α = 11,1 cm

6 $E_π = 320\ cm^2$, $V = 512\ cm^3$

7 $E_{ολ} = 62{,}35\ cm^2$

8 Αν $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{9}$ τότε $\dfrac{α_1}{α_2} = \dfrac{1}{3}$.

9 $V = 1200\ cm^3$

10 **α)** $E_π = 171{,}7\ cm^2$ **β)** $E_{ολ} = 265{,}23\ cm^2$
γ) $V = 249{,}42\ cm^3$

4.5. Ο κώνος και τα στοιχεία του

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Λ **2** Σ **3** Σ **4** Σ **5** Β **6** Γ **7** Α
8 Β **9** Γ **10** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1

ύψος (cm)	4	8	10	6,7
ακτίνα βάσης (cm)	3	6	4	6
γενέτειρα (cm)	5	10	10,8	9
όγκος (cm^3)	37,68	301,44	167,47	252,45
εμβ.παράπλ. επιφ. (cm^2)	47,1	188,4	135,27	169,56

2 **α)** $2m^3$, **β)** $4m^3$, **γ)** $8m^3$

3 Το νερό δεν θα ξεχειλίσει.

4 Τουλάχιστον 5,04 m.

5 $V_{ολ} = 301{,}44\ cm^3$, $E_{ολ} = 241{,}28\ cm^2$

6 $V = 335\ cm^3$

7 **α)** $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$, **β)** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$

8 **α)** $E_{ολ} = 408{,}2\ cm^2$, **β)** $V_{ολ} = 628\ cm^3$

9 1570 m^2 ύφασμα.

10 Περίπου 60 min.

4.6. Η σφαίρα και τα στοιχεία της

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Σ **2** Σ **3** Σ **4** Λ **5** Σ
6 Γ **7** Δ **8** Γ **9** Δ **10** Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1 **Α.**

ακτίνα σφαίρας (cm)	1	2	10	6
εμβαδόν επιφάνειας (cm^2)	4π	16π	400π	144π
όγκος (cm^3)	$\dfrac{4π}{3}$	$\dfrac{32\ π}{3}$	$\dfrac{4000\ π}{3}$	288π

Β.

ρ	1m	10cm	3,2dm	8dm	3m
Ε	4π m^2	400π cm^2	40,96π dm^2	256π dm^2	36π m^2
V	$\dfrac{4π}{3}\ m^3$	$\dfrac{4000\ π}{3}\ cm^3$	43,69π dm^3	682,67π dm^3	36π m^3

2 $E = 50{,}24\ cm^2$, $V = 33{,}5\ cm^3$

3 $E = 100{,}48\ m^2$, $V = 133{,}97\ m^2$

4 Με 2, 6, 10 αντίστοιχα. **5** 157 κιλά χρώμα.

6 Οι κίτρινες μπάλες έχουν μεγαλύτερη συνολική επιφάνεια και μεγαλύτερο συνολικό όγκο.

7 Ο όγκος που απομένει είναι 244.053 cm^3.

8 δ = 50 cm **9** $V = 200{,}96\ cm^3$.

ευρετήριο όρων

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ

βιβλιογραφία

1. Andibi, André: “*Nouveau Transmath, 5e*”, Nathan, 2000.
2. Bolt, Brian: “*A Mathematical Jamboree*”, Cambridge University Press, 1995.
3. Buckwell, Geoff: “*Work Out Core Mathematics Gcse/ks4*”, Palgrave Macmillan, 1995.
4. Crisler, Nancy - Froelich, Gary: “*Discrete Mathematics through Applications*”. W. H. Freeman, 2006.
5. Gérald, Nadine - Jacob, Nadine - Riou, Elisabeth - Courivaud, Claude - Dodard, Alain - Roncin, Pascal: “*Trapèze. Math*ématiques 3e”, Bréal Rosny, 1999.
6. Hoffmann, Banesh: “*About Vectors*”, Dover Publications, 1966.
7. Jacobs, Harold R.: “*Elementary Algebra*”, W. H. Freeman, 1979.
8. Jacobs, Harold R.: “*Mathematics. A Human Endeavor*”, W. H. Freeman, 1994.
9. Laborde, Jean-Marie and Bellemain, Franck: “*Cabri - Geometry II*”, Texas Instruments, 1993.
10. Lanoëlle, Alain - Nassiet, Francis - Perrinaud, Jean-Claude - Porté, Daniel - Rivoallan, Louis: “*Dimathème, 4ème*”, Didier, 1998.
11. National Council of Teachers of Mathematics: “*Principles and Standards for School Mathematics*”, NCTM, 2000.
12. Parker, Marla: “*She Does Math ! : Real - Life Problems from Women on the Job*”, Mathematical Association of America, 1995.
13. Rayner, Douglas: “*General mathematics: revision and practice*”, Oxford University Press, 1984.
14. Serra, Eric - Barberi, Daniel - Concas, Christine - Escalier, Elian - Germoni, Louis - Germoni, Michèle - Pupin, Cathy: “*Math 3e*”, Bordas, 1999.
15. Serra, Michael: “*Discovering Geometry: An Inductive Approach (Student)*”, Key Curriculum Press, 1997.
16. Serra, Michael: “*Discovering Geometry: An Investigative Approach*”, Key Curriculum Press, 2002.
17. The Consortium for Mathematics and its Applications: “*Mathematics; Modelling Our World*”, W. H. Freeman, 1998.
18. Γαβρίλης, Κωνσταντίνος - Γαβρίλης, Δημήτρης: «*Μαθαίνοντας στο Internet Μαθηματικά*», Εκδόσεις Καστανιώτη, 2001.
19. Δημητρακόπουλος, Δημήτρης: «*Καινοτόμες προσεγγίσεις των Μαθηματικών μέσα από εφαρμογές*», Εκδόσεις Προμηθεύς, 2000.
20. Τουμάσης, Μπάμπης: «*Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών*», Εκδόσεις Κωστόγιαννου, 1999.
21. Τουμάσης, Μπάμπης: «*Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*», Εκδόσεις Gutenberg, 2002.
22. Τουμάσης, Μπάμπης - Αρβανίτης, Τάσος: «*Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ*», Εκδόσεις Σαββάλα, 2003.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ
21-0211

Κωδικός βιβλίου: 0-21-0211
ISBN 978-960-06-2718-3

ΙΤΥΕ "ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 21 0211 5